15. а) $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$ **- решено программой UMS**

б) корни из промежутка $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

Решение.

а) $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$

$3(1 - 2\sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$

$3 - 6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

$-6\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$

$6\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

Пусть $\sin x = a$

Тогда $6a^2 + 5a - 4 = 0$; $D = 5^2 - 4\cdot 6\cdot(-4) = 121$; $\sqrt{D} = 11$

$a_1 = \frac{-5-11}{2\cdot 6} = -\frac{4}{3}$ и $a_2 = \frac{-5+11}{2\cdot 6} = \frac{1}{2}$

Случай 1.

$\sin x = -\frac{4}{3}$ - нет решений, так как $0 \le |\sin x| \le 1$

Случай 2.

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Ответ а): $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

б) корни из промежутка $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 1 = \frac{13\pi}{6} \in [\pi; \frac{5\pi}{2}]$

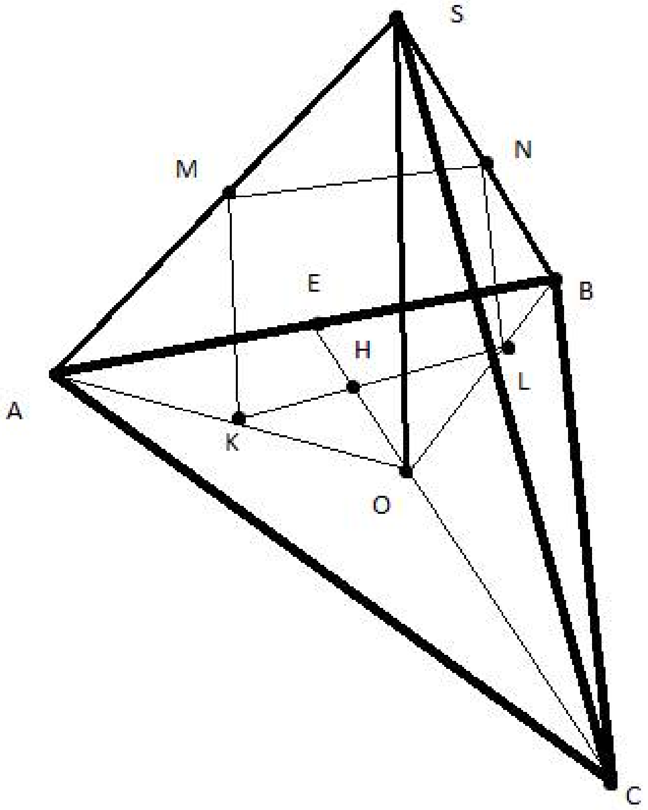
Ответ б): $\frac{13\pi}{6}$

16. Правильная треугольная пирамида $SABC$. Точки M и N - середины рёбер SA и SB. Через M и N проведена плоскость, перпендикулярная плоскости основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит медиану CE в отношении $1 \div 5$, считая от точки E .

б) Найдите площадь сечения, если $AB=36$, $SA=31$.

Решение.



Пусть O - центр основания пирамиды. Проведем отрезки CE и AO , BO , SO .

а) 1. По свойству правильной пирамиды, $SO \perp \Delta ABC$ и O лежит на CE и $CO=2OE$.

$\Rightarrow \quad OE=\dfrac{1}{3}CE$

Пусть K - середина AO ; L - середина BO .

2. $MK \| SO$ и $NK \| SO$ - по теореме о средней линии треугольника.

3. Вывод: $MK \perp \Delta ABC$ и $NK \| \Delta ABC$, точки и прямые MK и NK лежат в одной плоскости $\alpha \perp \Delta ABC$ и $KL \subset \alpha$.

Пусть KL пересекает CE в точке H .

4. KL - средняя линия в ΔAOB $\Rightarrow$ $KL \| AB$ $\Rightarrow$ KL - средняя линия в ΔAOB $\Rightarrow$

$EK=\dfrac{1}{2}OE \quad \Rightarrow \quad EK=\dfrac{1}{6}CE \quad \Rightarrow \quad CK=\dfrac{5}{6}CE \quad \Rightarrow$

$EK \div CK=1 \div 5$ - ч.т.д.

б)1. MN - средняя линия $\triangle ASB$ $\Rightarrow$ $MN \| AB$ и $MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$

2. $OA = R = \frac{36}{2\sin 60^\circ} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$ - по теореме синусов.

3. $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{31^2 - (12\sqrt{3})^2} = \sqrt{529} = 23$ - по теореме Пифагора.

4. $MK = \frac{1}{2} SO = \frac{23}{2}$

5. $MNLK$ - прямоугольник $\Rightarrow$ $S_{MNLK} = MN \cdot MK = 18 \cdot \frac{23}{2} = 207$

Ответ б): $S_{MNLK} = 207$

.

17. $\frac{31 - 5^x}{25^x - 30 \cdot 5^x + 125} \geq 0,25$ **- решено программой UMS**

Решение.

Отметим О.Д.З. $25^x - 30 \cdot 5^x + 125 \neq 0$

Пусть $5^x = a$

Решаем вспомогательное уравнение.

$a^2 - 30a + 125 = 0$

$D = (-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 125 = 900 - 500 = 400$; $\sqrt{D} = 20$

$a_1 = \frac{30 - 20}{2} = 5$ и $a_2 = \frac{30 + 20}{2} = 25$

$5^x \neq 5$ $\Rightarrow$ $x \neq 1$ и $5^x \neq 25$ $\Rightarrow$ $x \neq 2$

Тогда $\frac{31 - a}{a^2 - 30a + 125} \geq 0.25$ $\Rightarrow$

$$\frac{31 - a - 0.25 \cdot (a^2 - 30a + 125)}{a^2 - 30a + 125} \geq 0$$

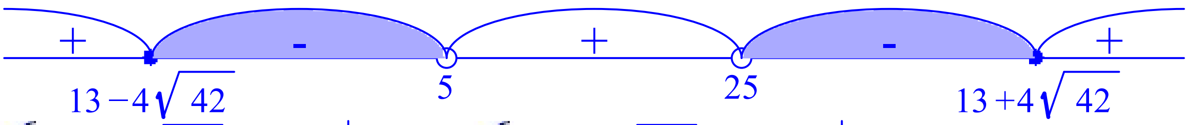
$$\frac{31 - a - 0.25a^2 - 7.5a + 31.25}{a^2 - 30a + 125} \geq 0$$

$$\frac{-0.25a^2 + 6.5a - 0.25}{(a - 5)(a - 25)} \geq 0$$

$$-\frac{0.25\left(a^2-26a+1\right)}{(a-5)(a-25)}\geq 0$$
$$\frac{a^2-26a+1}{(a-5)(a-25)}\leq 0$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$$a^2-26a+1=0$$
$$D=(-26)^2-4\cdot 1\cdot 1=676-4=672\ ;\ \sqrt{D}=\sqrt{672}=4\sqrt{42}$$
$$a_1=\frac{26-4\sqrt{42}}{2}=13-2\sqrt{42}\ \text{ и }\ a_2=\frac{26+4\sqrt{42}}{2}=13+2\sqrt{42}$$
$$\frac{\left(a-\left(13-4\sqrt{42}\right)\right)\left(a-\left(13+4\sqrt{42}\right)\right)}{(a-5)(a-25)}\leq 0$$

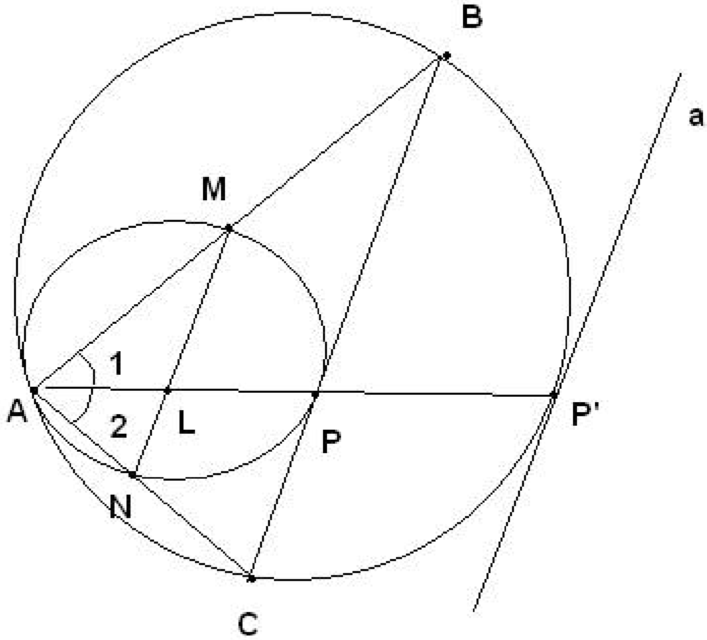


$$\left[\begin{cases}13-4\sqrt{42}\leq a<5\\ 25<a\leq 13+4\sqrt{42}\end{cases}\right. \Rightarrow \left[\begin{cases}13-4\sqrt{42}\leq 5^x<5\\ 25<5^x\leq 13+4\sqrt{42}\end{cases}\right. \Rightarrow$$
$$\left[\begin{cases}\log_5\left(13-4\sqrt{42}\right)\leq x<1\\ 2<x\leq \log_5\left(13+4\sqrt{42}\right)\end{cases}\right.$$

Ответ: $\log_5\left(13-4\sqrt{42}\right)\leq x<1\ ;\ 2<x\leq \log_5\left(13+4\sqrt{42}\right)$

18. а) Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Центр большей окружности лежит на меньшей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P. AB пересекает меньшую в точке M, AC - в точке N. Доказать, что $MN \| BC$.

б) L - точка пересечения MN и AP. Найти AL, если $BC=32$, а радиус большей окружности равен 34.



Решение.

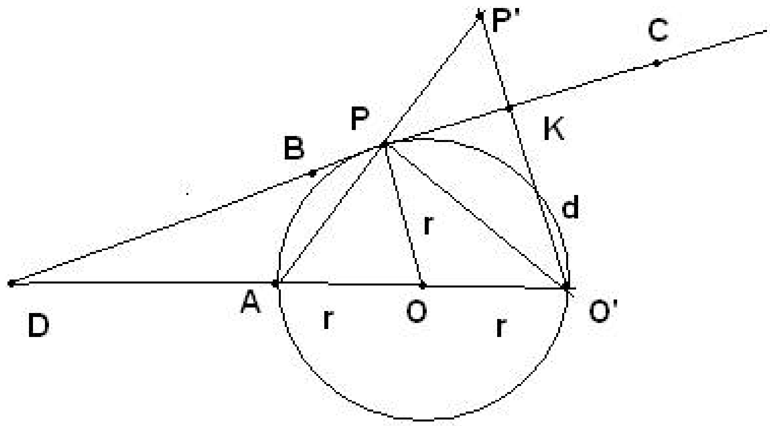
а) Рассмотрим гомотетию с центром в точке A с коэффициентом 2.

При этой гомотетии малая окружность переходит в большую.

Точка M - в точку B, а точка N - в точку C, а точка P - в точку P'.

Прямая MN переходит в параллельную ей прямую BC, то есть $MN \| BC$ - ч.т.д.

б)



$AP = 2r \sin \dfrac{\widehat{AOP}}{2}$ (из $\triangle OAP$).

Пусть $\widehat{AOP} = x$

$OD = \dfrac{r}{\cos x}$. $\triangle DPO \backsim \triangle DKO'$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d}{r} = \dfrac{DO + r}{DO}$ $\Rightarrow$

$$\frac{d}{r}=\frac{\frac{r}{\cos x}+r}{\frac{r}{\cos x}}=1+\cos x \quad \Rightarrow \quad d=r(1+\cos x)=2r\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2=R^2-d^2=(2r)^2-\left[2r\sin^2\frac{x}{2}\right]^2=4r^2\left[1-\sin^4\frac{x}{2}\right]$$

Пусть $t=\sin\frac{x}{2}$

$$16^2=34^2(1-t^4) \quad \Rightarrow \quad t=\frac{\sqrt{255}}{17} \quad \Rightarrow \quad AP=2rt=34\cdot\frac{\sqrt{255}}{17}=2\sqrt{255}$$

Ответ б): $AP=2\sqrt{255}$

19. Кредит на 12 месяцев. Суть в том, что долг по кредиту уменьшается на одну и ту же величину. Сумма, которая была отдана банку на 24% превышает сумму, которую взяли в кредит. Найти месячный процент.

Решение.

P - сумма кредита

x - ежемесячный процент кредита (оплата банку за пользование его деньгами на месяц).

$d=\frac{P}{12}$ - сумма, которая ежемесячно выплачивалась для погашения долга банку.

В первый месяц надо выплатить банку $a_1=Px+d$

Во второй месяц - $a_2=(P-d)x+d$

В третий месяц - $a_3=(P-2d)x+d$

……

В одиннадцатый месяц - $a_{12}=(P-10d)x+d$

За 12 месяцев банку клиент выплатил

$$S=a_1+a_2+....a_{12}=\left(12P-\frac{(d+11d)}{2}\cdot 12\right)x+12d=12Px-72dx+12d=$$

$$=12Px-\frac{72}{12}Px+P=6Px+P \quad \Rightarrow \quad 6P\cdot x+P=1,24P$$

$x=0,04$

Ответ: 4%

20. При каких a система $\begin{cases} x^2+2x+y^2+4y=4|2x-y| \\ x+2y=a \end{cases}$ имеет более двух решений?

Решение.

Построим график уравнения: $x^2+2x+y^2+4y=4|2x-y| \quad \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-y\geq 0 \\ x^2+2x+y^2+4y=4(2x-y) \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y<0 \\ x^2+2x+y^2+4y=-4(2x-y) \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-y\geq 0 \\ x^2+y^2-6x+8y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y<0 \\ x^2+y^2+10x=0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-y\geq 0 \\ (x-3)^2+(y+4)^2=5^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y<0 \\ (x+5)^2+y^2=5^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

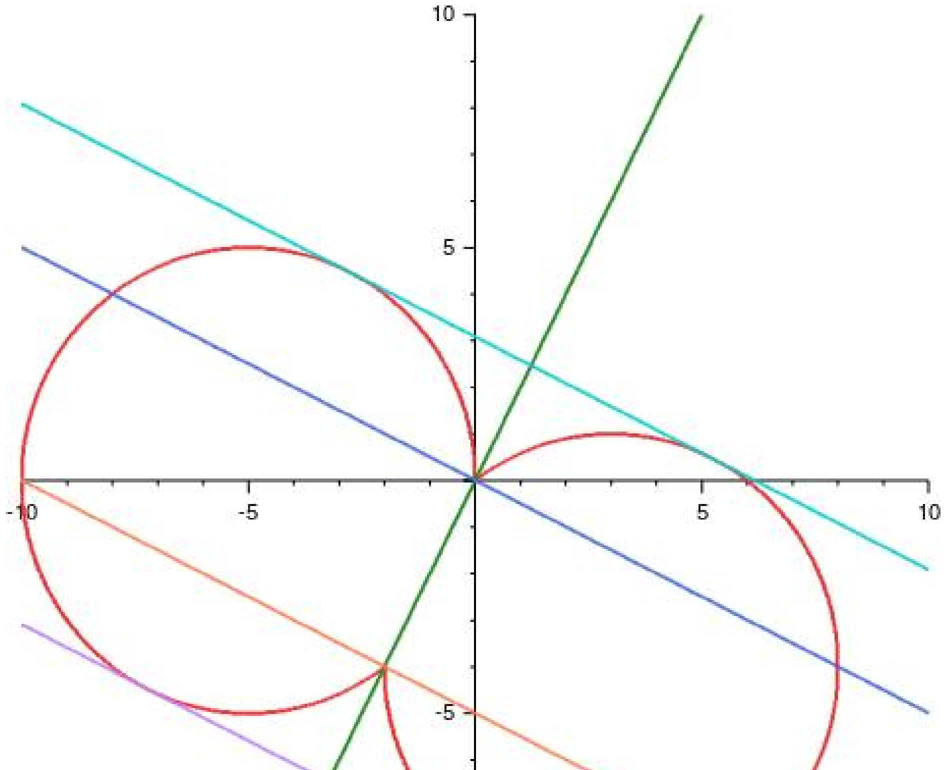


График уравнения - красная восьмерка: объединение двух частей окружностей радиусом 5 и центрами в точках $(-5;0)$ и $(3;-4)$. Эти окружности пересекаются в точках $(0;0)$ и $(-2;-4)$. Для нахождения точек пересечения окружностей достаточно решить систему: $\begin{cases} x^2+2x+y^2+4y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

График второго уравнения системы: $x+2y=a \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$ параллелен прямой $y=-\frac{1}{2}x$, которая перпендикулярна темно-зеленой прямой $y=2x$, поскольку произведение угловых коэффициентов равно -1. Среди подобных прямых выделяются две касательные (при $a=-5\pm5\sqrt{5}$). Для их нахождения достаточно определить значения a, для которых система $\begin{cases} x+2y=a \\ x^2+y^2+10x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-2y \\ x^2+y^2+10x=0 \end{cases}$ имеет единственное решение (через дискриминант).

Наконец, по графику системы определяем, что прямая $y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$ пересекает восьмерку более чем в двух точках при условии $\begin{cases} -5-5\sqrt{5}<a<-5+5\sqrt{5} \\ a\neq0 \\ -4\neq-\frac{1}{2}(-2)+\frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -5-5\sqrt{5}<a<-5+5\sqrt{5} \\ a\neq0 \\ a\neq-10 \end{cases}.$$

Это условие можно записать и в виде объединения промежутков:

$a\in\left]-5-5\sqrt{5},\ -10\right[\cup\left]-10,\ 0\right[\cup\left]0,\ -5-5\sqrt{5}\right[$

Ответ: $a\in\left]-5-5\sqrt{5},\ -10\right[\cup\left]-10,\ 0\right[\cup\left]0,\ -5-5\sqrt{5}\right[$

21. а) Существует ли 4-значное число, произведение цифр которого в 15 раз больше суммы?

Решение.

Существует.

$a\cdot b\cdot c\cdot d=15\cdot(a+b+c+d)$, где $a,\ b,\ c,\ d$ - цифры четырехзначного числа.

Заключаем, что среди сомножителей должны присутствовать цифры 3 (6 или 9) и 5.

Предположим, $a=3$, а $b=5$.

Тогда, $c \cdot d = 3 + 5 + c + d$ или $c \cdot d = 8 + c + d$.

Решением этого уравнения может быть, например, $c = 4$ и $d = 4$.

Таким образом, искомое число может иметь, например, следующий вид: 3544

б) Существует ли 4 -значное число, произведение цифр которого в 200 раз больше суммы?

Решение.

Не существует.

$a \cdot b \cdot c \cdot d = 200 \cdot (a + b + c + d)$

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, следовательно, два сомножителя должны быть $5, 5$.

Пусть, для определенности, $a = 5$ и $b = 5$.

Получаем, что $cd = 8(10 + c + d) \quad \rightarrow \quad (c - 1)d = 8(10 + c) \quad \Rightarrow$

$d = \frac{80}{c-1} + \frac{8c}{c-1} > \frac{80}{c-1} \geq 10$, что невозможно.

в) Найти все 4 -значные числа, произведение цифр которых в $12{,}5$ раз больше суммы.

Решение.

$a \cdot b \cdot c \cdot d = 12{,}5 \cdot (a + b + c + d) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d = 25 \cdot (a + b + c + d) \Rightarrow$

две цифры должны быть равны 5 (пусть, для определенности, это будут $a = 5$ и $b = 5$)

Получаем:

$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot c \cdot d = 25 \cdot (5 + 5 + c + d) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot c \cdot d = 10 + c + d \quad \Rightarrow \quad c \cdot d = 5 + \frac{c+d}{2}$

$c + d$ - четное число; $c \cdot d \leq 14$; $d = \frac{c+10}{2c-1}$.

$c \neq 1$, так как в противном случае $d = 5 + \frac{d+1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2d = 10 + d + 1 \quad \Rightarrow \quad d = 11$ - это не цифра

$c \neq 3$,так как в противном случае $3d = 5 + \frac{d+3}{2} \quad \Rightarrow \quad 6d = 10 + d + 3 \quad \Rightarrow \quad 5d = 13$

Если $c = 2$, то $d = \frac{c+10}{2c-1} = \frac{12}{3} \Rightarrow \quad d = 4$;

если $c = 4$, то $d = \frac{c+10}{2c-1} = \frac{14}{7} \Rightarrow \quad d = 2$;

если $c>5$, то $1<d=\dfrac{c+10}{2c-1}<2$, что невозможно.

Итак, в рассматриваемом случае получаются числа 5542 ; 5524

Остальные возможные случаи получаются перестановками цифр и данных.

Доказывается аналогично.

Ответ: числа могут быть следующими: 5542 ; 5524 5425 ; 5452 ; 5245 ; 5254 4552 ; 4525 4255 2554 ; 2545 2455