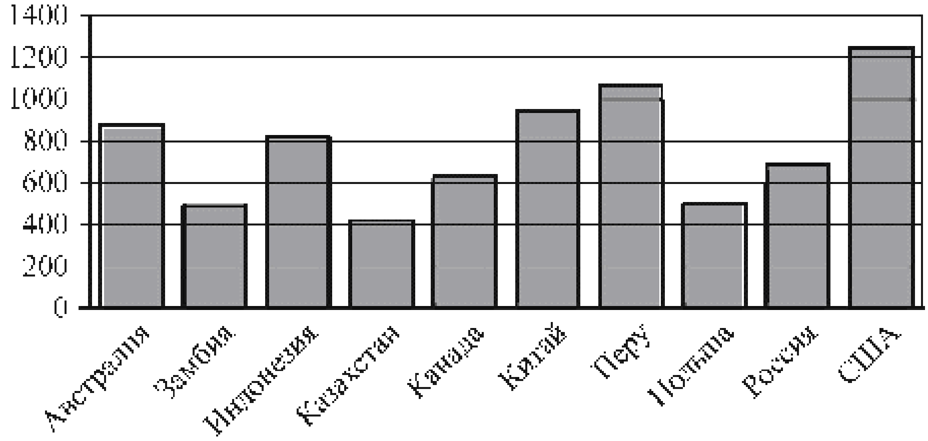
$B1$ Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает $1,05$ мг активного вещества на каждый килограмм в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?

Решение.

$$(1,05\cdot 8) : \frac{70\cdot 4}{100} = \frac{8,4}{2,8} = 3$$

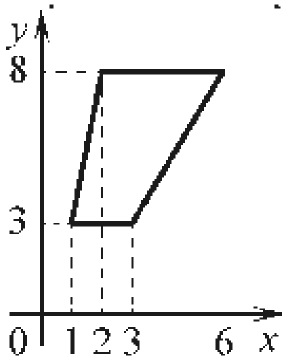
Ответ: 3 таблетки в сутки.

$B2$ На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место - Казахстан. Какое место занимала Канада?



Ответ: Канада выплавляет приблизительно 620 тысяч тонн меди и занимает 7 место.

$B3$ Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



Решение.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, поэтому

$$S=\frac{(6-2)+(3-1)}{(8-3)}=\frac{4\cdot 2}{5}=\frac{8}{5}=1,6$$

Ответ: $S=1,6$

$B4$ Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R=4(2F+2Q+D)-0,01P\ .$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Ф ункциональность	Качество	Дизайн
А	4000	1	0	0
Б	4500	4	3	0
В	4400	2	3	0
Г	4200	2	3	4

Решение.

$R_А = 4(2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0) - 0{,}01 \cdot 4000 = 4 \cdot 2 - 40 = -32$

$R_Б = 4(2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0) - 0{,}01 \cdot 4500 = 4 \cdot 14 - 45 = 11$

$R_В = 4(2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0) - 0{,}01 \cdot 4400 = 4 \cdot 10 - 44 = -4$

$R_Г = 4(2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4) - 0{,}01 \cdot 4200 = 4 \cdot 14 - 42 = 14$

Ответ: наивысший рейтинг $R_Г = 14$ имеет модель $Г$.

$B5$ Найдите корень уравнения $6^{-6+x} = 36$.

Решение.

(решает программа UMS online)

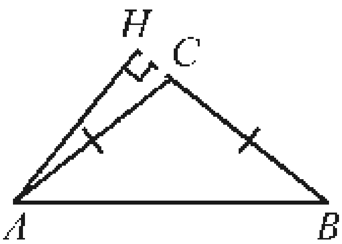
$6^{-6+x} = 36 \quad \Rightarrow \quad 6^{-6+x} = 6^2$

Воспользуемся свойством степеней.

$-6 + x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 + 6 \quad \Rightarrow \quad x = 8$

Ответ: $x = 8$

$B6$ В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 20$, высота AH равна 8 .Найдите синус угла BAC .



Решение.

$\angle BAC = \angle CBA$ - углы при основании равнобедреноого треугольника равны.

$$\sin \angle BAC = \sin \angle CBA = \frac{BH}{AB} = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

Ответ: $\sin \angle BAC = 0{,}4$

*B*7 Найдите значение выражения $\log_2(240) - \log_2(3{,}75)$

Решение.

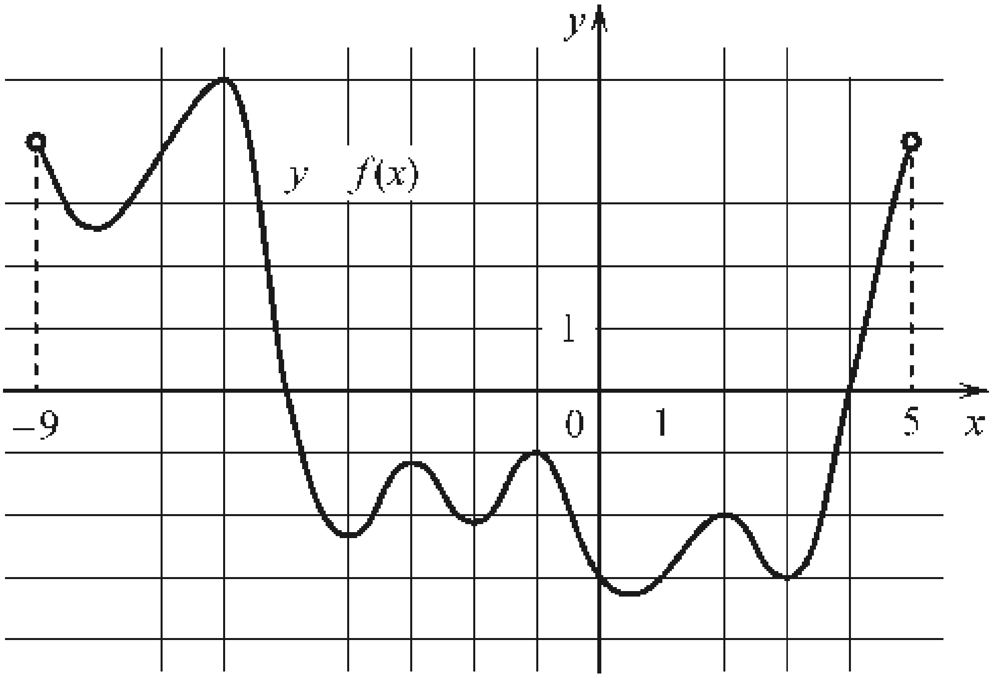
(решает программа UMS online).

$$\log_2(240) - \log_2(3{,}75) = \log_2(240:3{,}75) = \log_2(64) =$$

$$= \log_2(2^6) = 6$$

Ответ: 6 .

*B*8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-9;\,5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0 .

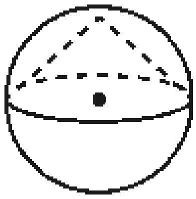


Решение.

В точках локальных максимумов (их 4) и локальных минимумов (их 5) производная функции $f(x)=0$

Ответ: в 9 точках.

$B9$ Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



Решение.

H_k - высота конуса равна радиусу сферы. R_k - радиус основания конуса также равен радиусу сферы. L_k - образующая конуса равна

$$\sqrt{H_k^2+R_k^2}=\sqrt{2\cdot\left(10\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2\cdot 200}=\sqrt{400}=20$$

Ответ: образующая конуса равна 20.

$B10$ Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Решение.

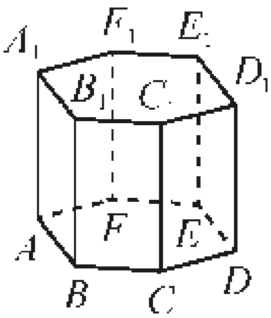
Всего участников (без Москвина) $76-1=75$,

из них теннисистов из России $7-1=6$.

$$p=\frac{6}{75}=\frac{2}{25}=0,8$$

Ответ: вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России равна $0,08$.

$B11$ Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $D,\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.



Решение.

Многогранник, вершинами которого являются точки $D,\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ является пирамидой.

$$V_{\text{пирамиды}}=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 2=8$$

Ответ: $V_{DA_1B_1C_1D_1E_1F_1}=8$.

$B12$ Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультрозвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v=c\cdot\dfrac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c=1500$ м/с - скорость звука в воде, f_0 - частота испускаемых импульсов (в МГц), f - частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

Решение.

(решает программа UMS online)

$$v\le 12$$

$$c\cdot\frac{f-f_0}{f+f_0}\le 12 \quad \Leftrightarrow$$

$$c\left(f-f_0\right)\le 12\left(f+f_0\right)$$

$$cf-cf_0\le 12f+12f_0$$

$$cf-12f\le 12f_0+cf_0$$

$$(c-12)f\le(12+c)f_0$$

$$f\le\frac{(12+c)f_0}{(c-12)}=\frac{(12+1500)\cdot 217}{1500-12}=\frac{1512\cdot 217}{1488}=\frac{63\cdot 24\cdot 7\cdot 31}{2\cdot 31\cdot 24}=$$

$$=\frac{441}{2}=220{,}5$$

Ответ: $220{,}5$ МГц.

$B13$ Байдарка в $10:00$ вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в $16:00$ того же дня. Определите (в км/час) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/час.

Решение.

Пусть x км/час - собственная скорость байдарки. Тогда общее время движения (по течению и против течения) можно выразить в виде:

$$\frac{15}{x+2}+\frac{15}{x-2}$$

С другой стороны это время равно $16-10-1\frac{20}{60}=6-1\frac{1}{3}=4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ часа.

Получим уравнение, которое может помочь решить **UMS online.**

$$\frac{15}{x+2}+\frac{15}{x-2}=\frac{14}{3}$$

Умножим обе части уравнения на 3 :

$$\frac{45}{x+2}+\frac{45}{x-2}=14$$

,

$$\frac{45(x-2)+45(x+2)}{(x+2)(x-2)}-14=0$$

, $\frac{90x}{x^2-14}-14=0$

$$\frac{90x-14(x^2-4)}{x^2-14}=0$$

$$90x-14(x^2-4)=0$$

$14x^2-90x-56=0$ (разделим обе части уравнения на 2)

$$7x^2-45x-28=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=(-45)^2-4\cdot 7(-28)=2809$$

Дискриминант положителен, значит, уравнение имеет два корня.

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-45)\pm\sqrt{2809}}{2\cdot 7}$$

$$x_1=\frac{45-53}{2\cdot 7}=-\frac{4}{7}\ ;\ x_2=\frac{45+53}{2\cdot 7}=7$$

По смыслу задачи подходит только положительное решение.

Ответ: $x=7$ км/час.

$B14$ Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+441}{x}$ на отрезке $[2; 32]$.

Решение.

Это задание может помочь решить **UMS online.**

Находим производную функции.

Воспользуемся формулой производной частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$y' = \frac{(x^2+441)'x-(x^2+441)x'}{x^2} = \frac{(2x+0)\cdot x-(x^2+441)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2-x^2-441}{x^2} = \frac{x^2-441}{x^2}$$

Находим критические точки :

$$y'=0$$

$$x^2-441=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=441 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{441}=\pm 21$$

$x_1=-21$ не принадлежит рассматриваемому промежутку $[2;32]$

$x_2=21$ принадлежит рассматриваемому промежутку $[2;32]$

Наименьшее значение на отрезке функция принимает либо на концах отрезка, либо в критических точках, принадлежащих данному отрезку.

1) Если $x=2$, то $y=\frac{2^2+441}{2}=\frac{445}{2}=222,5$

2) Если $x=21$, то $y=\frac{21^2+441}{21}=\frac{882}{21}=42$

3) Если $x=32$, то $y=\frac{32^2+441}{32}=\frac{1024+441}{32}=\frac{1465}{32}=45\frac{25}{32}$

Вывод: наименьшее значение функции на данном отрезке равно 42

Ответ: 42

$C1$ а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$,

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

(решает программа UMS online).

а) $15^{\cos x} = 3^{\cos x} 5^{\sin x}$ (воспользуемся свойством степеней) $\Leftrightarrow$

$3^{\cos x} 5^{\cos x} = 3^{\cos x} 5^{\sin x}$ $\Leftrightarrow$ (разделим обе части уравнения на $3^{\cos x}$)

$5^{\cos x} = 5^{\sin x}$ (воспользуемся свойством степеней) $\Leftrightarrow$

$\cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow$

$\tan x = 1 \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

б) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$5\pi \le \frac{\pi}{4} + \pi k \le \frac{13\pi}{2} \quad \Leftrightarrow$

$5 \le \frac{1}{4} + k \le \frac{13}{2} \quad \Leftrightarrow$

$5 - \frac{1}{4} \le k \le \frac{13}{2} - \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{19}{4} \le k \le \frac{25}{4} \quad \Leftrightarrow$

$4\frac{3}{4} \le k \le 6\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow$

$k=5$ или $k=6$

Если $k=5$, то $x = \frac{\pi}{4} + 5\pi = \frac{21\pi}{4}$

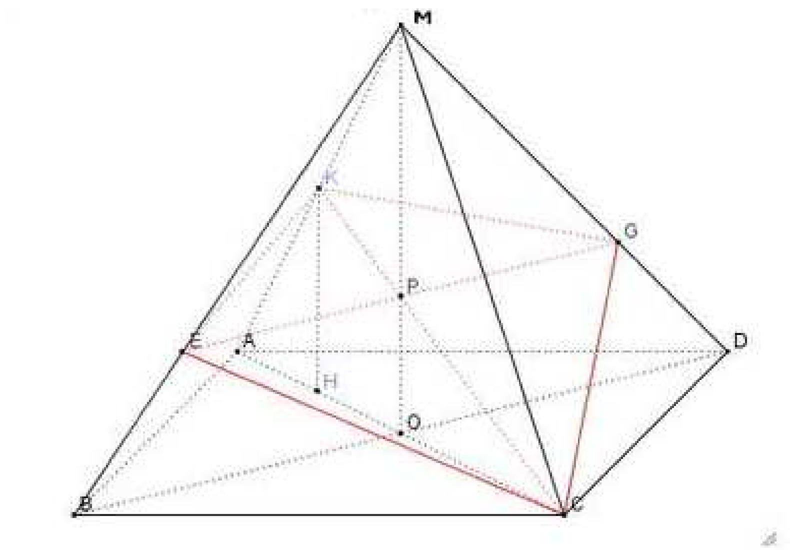
Если $k=6$, то $x = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{25\pi}{4}$

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

б) $\frac{21\pi}{4};\frac{25\pi}{4}$

$C2$ В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.



Обозначим середину ребра AM через K, середину диагонали AC - через O. Медианы CK и MO ΔAMC пересекаются в некоторой точке. Обозначим ее через P.

Длину отрезка MO можно найти по теореме Пифагора:

$$MO=\sqrt{12^2-CO^2}=\sqrt{144-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{126}$$

Плоскость сечения и плоскость (AMC) имеют общую точку P, поэтому они пересекаются по некоторой прямой параллельной BD.

Через точку P в плоскости (AMC) проведем прямую $EG||BD$

По свойству медиан : $\dfrac{MP}{MO}=\dfrac{2}{3}$.

$\triangle MEG \backsim \triangle MBD \Rightarrow EG=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{2}{3}\cdot 6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

MO - высота правильной пирамиды $\Rightarrow$ $MO\perp BD$.

$AC\perp BD$ (диагонали квадрата перпендикулярны).

Вывод : $BD\perp(AMC)$ (если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпедикулярна и самой плоскости).

Поэтому $EG\perp(AMC)$ (поскольку $EG\|BD$) $\Rightarrow$ $EG\perp CK$

В $\triangle AKC$ проведем высоту KH .

Ясно, что KH - средняя линия этого треугольника.

Поэтому $KH=\dfrac{1}{2}MO=\dfrac{\sqrt{126}}{2}$.

$$HO=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}=1{,}5\sqrt{2} .$$

$$HC=1{,}5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4{,}5\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2} .$$

По теореме Пифагора

$$KC=\sqrt{KH^2+HC^2}=\sqrt{\frac{126}{4}+\frac{162}{4}}=\frac{\sqrt{288}}{2}=6\sqrt{2}$$

$$S=S_{\triangle EKG}+S_{\triangle ECG}=\frac{1}{2}EG\cdot KP+\frac{1}{2}EG\cdot CP=\frac{1}{2}EG\cdot(KP+PC)$$

$$=\frac{1}{2}EG\cdot KC=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=24 .$$

Ответ: 24 .

$C3$ Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x}\left(\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\right) \geq -2 \\ x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4} \leq 3 \end{cases}.$$

Решение.

(решает программа UMS online).

1) $\log_{3-x}\left(\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\right) \geq -2 \quad \Leftrightarrow$

$$\log_{3-x}\left(\frac{x+4}{(x-3)^2}\right)+2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_{3-x}(x+4)+\log_{3-x}\left(\frac{1}{(x-3)^2}\right)+2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_{3-x}(x+4)-2+2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_{3-x}(x+4) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_{3-x}(x+4) \geq \log_{3-x}(1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4 \geq 1 \\ 3-x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4 \leq 1 \\ 0 < 3-x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -3\le x\le 2 \\ \begin{cases} x\le -3 \\ 2<x<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le x\le 2 \\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow -3\le x\le 2$$

2) $x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3 \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{21x^2+3x-12}{x-4}+x^3+6x^2-3\le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(21x^2+3x-12)+(x^3+6x^2-3)(x-4)}{x-4}\le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{21x^2+3x-12+x^4+2x^3-24x^2-3x+12}{x-4}\le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0$$

Решаем неравенство методом интервалов.

Решаем вспомогательные уравнения.

$(1) \quad x^4+2x^3-3x^2=0$; $(2) \quad x-4=0$

Уравнение 1 .

$$x^4+2x^3-3x^2=0$$

Решаем уравнение методом разложения на множители.

Выносим общий множитель.

$$x^2(x^2+2x-3)=0$$

Случай 1.1 .

$$x^2=0$$

Итак, ответ этого случая: $x=0$

Случай 1.2 .

$$x^2+2x-3=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1(-3)=16$$

Дискриминант положителен, значит уравнение имеет два корня.

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-2-4}{2\cdot 1}=-3\ ;\ x_2=\frac{-2+4}{2\cdot 1}=1$$

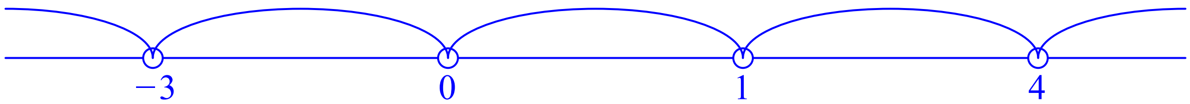
Итак, ответ этого случая: $x=-3;\ x=1$

Уравнение 2 .

$$x-4=0$$

$$x=4$$

Отметим найденные критические точки и соответствующие им интервалы на числовой прямой.

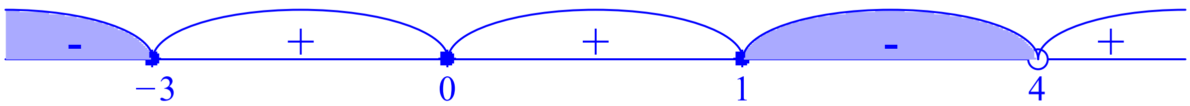


В каждом интервале рассчитаем знак выражения.

Числа $-3;\ 0;\ 1$ удовлетворяют неравенству.

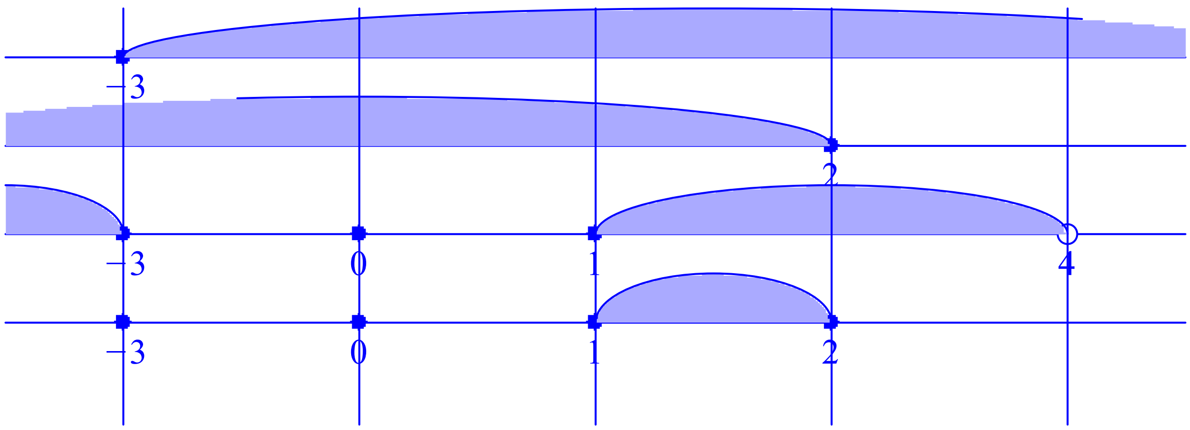
Число 4 не удовлетворяет неравенству.

Полученное решение отметим на рисунке.



$$x\le -3;\ x=0;\ 1\le x<4$$

Находим общее решение (пересечение решений) первого и второго неравеств



Ответ: $x=-3;\ x=0;\ 1\le x\le 2$.

$C4$ Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую - в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение

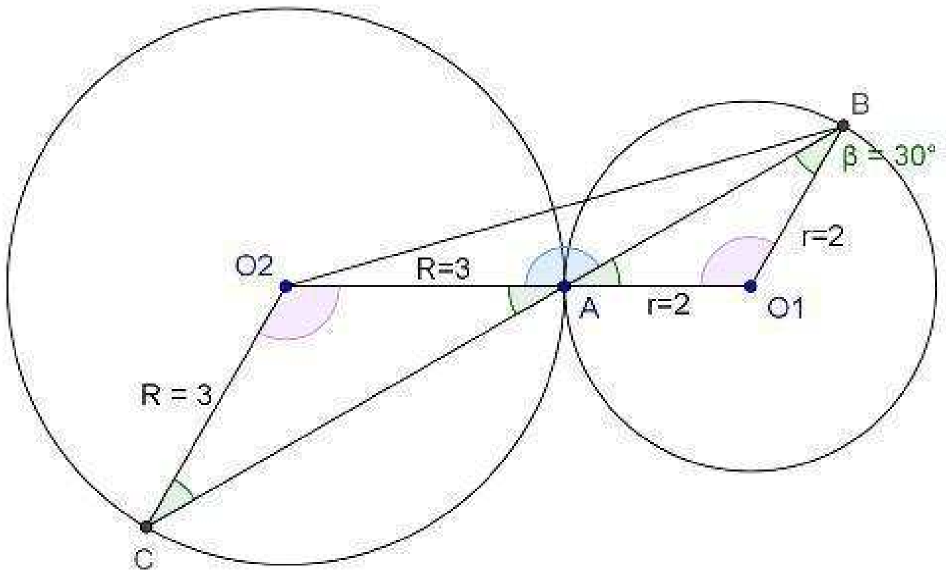
Здесь могут быть два случая:

первый — когда меньшая окружность находится вне большей,

второй — меньшая окружность находится внутри большей.

В обоих случаях, имея один известный угол, мы также знаем и все остальные, нужные нам.

Случай 1



$$\beta = 30° = \angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2$$

Использовали свойства равенства углов при основании равнобедренного треугольника и равенство вертикальных углов.

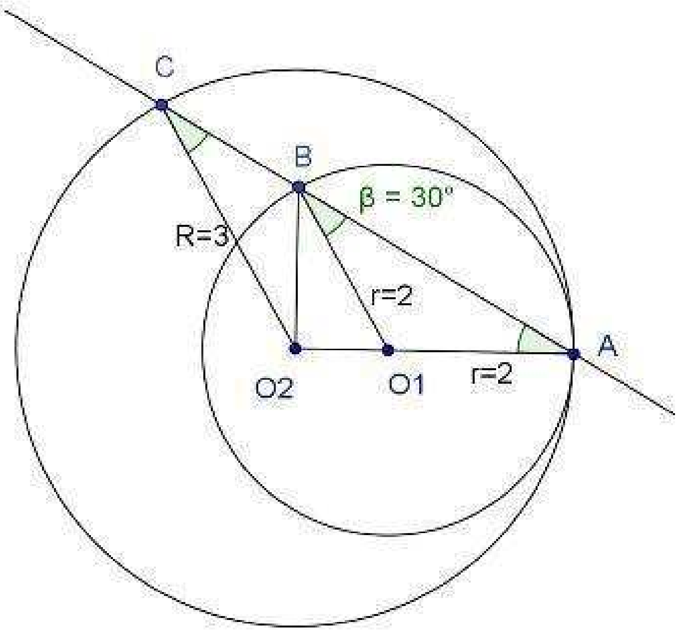
$$CA = 2 \cdot R \cdot \cos \angle C = 2 \cdot 3 \cdot \cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$AB = 2 \cdot r \cdot \cos \angle A = 2 \cdot 2 \cdot \cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$CB = CA + AB = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta BCO_2} = \frac{1}{2} CO_2 \cdot CB \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

Случай 2



$$CA = 2 \cdot R \cdot \cos \angle C = 2 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$AB = 2 \cdot r \cdot \cos \angle A = 2 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$CB = CA - AB = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$S_{\Delta BCO_2} = \frac{1}{2} CO_2 \cdot CB \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: случай 1 - $S_{\Delta BCO_2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$; случай 2 - $S_{\Delta BCO_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$C5$ Найдите все значения a , при которых уравнение

$$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$$

имеет единственный корень.

Решение.

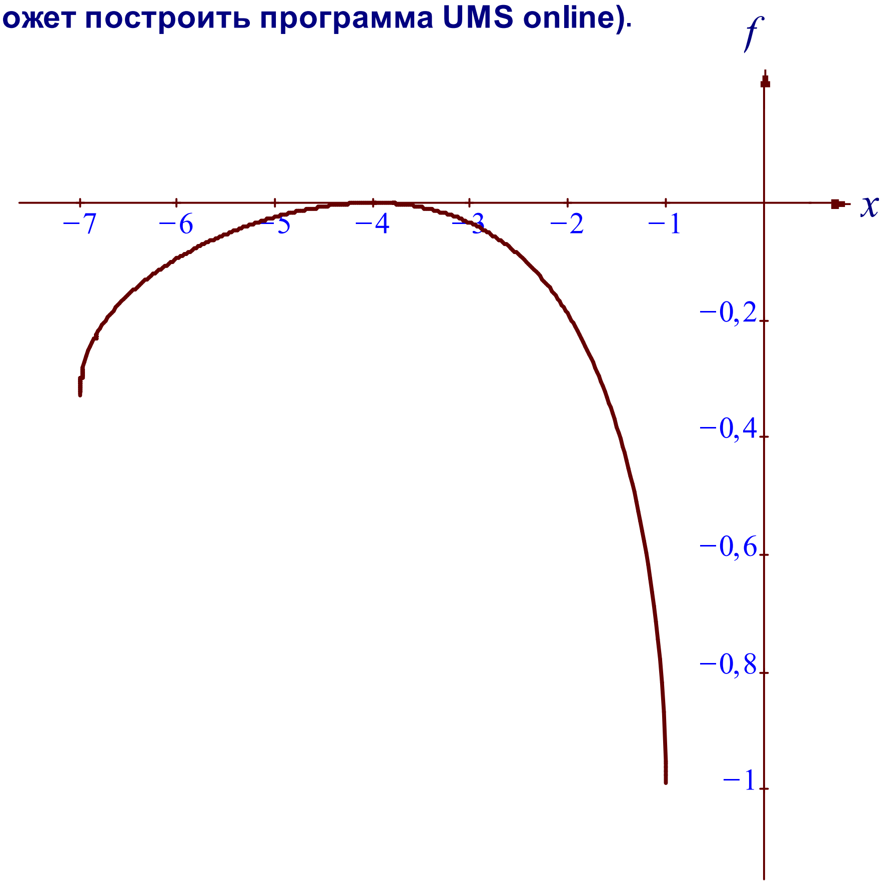
Выразим из уравнения переменную a

$$a(x-2)=3-\sqrt{-7-8x-x^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$a=\frac{3-\sqrt{-7-8x-x^2}}{x-2}$$

Построим эскиз графика функции: $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{-7-8x-x^2}}{x-2}$

(может построить программа UMS online).



Область определения. $[-7;-1]$

Производная : $f'(x)=\dfrac{-12x-30-6\sqrt{-7-8x-x^2}}{2(x-2)^2\sqrt{-7-8x-x^2}}$

Производную может найти **UMS online.**

Критические точки:

$$-12x-30-6\sqrt{-7-8x-x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4$$

(Это уравнение **решает программа UMS online)**

На промежутке $[-7;-4]$ функция возрастает от $-\dfrac{1}{3}$ до 0

На промежутке $[-4;-1]$ функция убывает от 0 до -1

Вывод : график функции $y=a$ пересекает исходный график в одной точке тогда и только тогда, когда $a=0$ или $-1\le a<-\dfrac{1}{3}$

Ответ: $a=0$ или $-1\le a<-\dfrac{1}{3}$

$C6$ Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их всевозможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется только одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа $1,\ 3,\ 3,\ 4$, то на доске будет записан набор $1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11$.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $2,\ 4,\ 6,\ 8$.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 22$?

в) приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $9,\ 10,\ 11,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 41,\ 42,\ 43,\ 52$.

Решение.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор

$2,\ 4,\ 6,\ 8$

Рассмотрим набор $2,2,4$

$2+2=4$

$2+4=6$

$2+2+4=8$

После вычеркивания одинаковых чисел получится требуемый набор.

Ответ для случая (а) : $2,2,4$

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор

$1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 22$

Пусть набор задуманных чисел - это последовательность в порядке неубывания

$a_1, a_2, \ldots a_n$.

Ясно, что $a_1 = 1$.

Далее, $a_2 \neq 1$ и $a_2 \neq 2$, поскольку в конечном наборе отсутствет 2

Поэтому , $a_2 = 3$

Тогда $a_3 \neq 3$ и $a_3 \neq 4$, поскольку $1+3+3=7$ и $3+4=7$ в конечном наборе отсутствет .

Поэтому , $a_3 = 5$ (в противном случае число 5 не было бы в конечном еаборе)

Итак задуманный набор начинается с чисел $1,3,5$

Отметим, что в задуманном наборе нет числа 6 , поскольку $1+3+5+6=15$ в конечном наборе отсутствет.

Отметим, что в задуманном наборе нет также чисел $10, 11, 12, 13, 14$.

В противном случае в итоговом наборе было число 15 или 16 (противоречие).

$5+10=15$

$5+11=15$

$3+12=15$

$3+13=16$

$1+14=15$

Предположим ,что $a_4 \neq 5$

Предположим, что $a_4 = 9$.

Если $a_5 = 9$, это означает, что задуманный набор состоит только из 4 чисел $1,3,5,9$. Тогда число 19 не входит в конечный набор.

Поскольку $1+3+5+9=18<19$ Противоречие.

Вывод : $a_4 \neq 9$.

Это означает, что исходный набор имеет вид $1,3,5,17$ или $1,3,5,18$.

Тогда число 23 входит в конечный набор. Противоречие.

Вывод : $a_4 = 5$

Итак задуманный набор начинается с чисел $1,3,5,5$.

Отметим, что $a_5 \neq 5$, поскольку $5+5+5=15$ в конечном наборе отсутствует.

Исходный набор не может состоять из 4 чисел, поскольку в этом случае число 17 не вошло бы в конечный набор.

Тогда задуманный набор имеет вид: $1,3,5,5,a$, где $a \geq 9$.

Тогда число $1+3+5+5+a \geq 23$. Это означает, что последнее число в конечном наборе не может быть 22 . Противоречие.

Так, во всех возможных случаях мы получили противоречие.

Вывод: не существует примера таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 22$

Ответ для случая (б) : не существует примера таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 22$

в) приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор $9,\ 10,\ 11,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 41,\ 42,\ 43,\ 52$

Ясно, что $a_1 = 9$.

Ясно, что $a_2 \neq 9$, поскольку $9+9=18$ в конечном наборе отсутствует .

Поэтому $a_2 = 10$.

Можно заключить, что $a_3 \neq 10$, поскольку $9+10+10=29$ в конечном наборе отсутствует .

Поэтому $a_3 = 11$

Возможные случаи.

1) $a_4 = 11$

2) $a_4 \neq 11$

Если имеет место случай (1) $a_4 = 11$, то исходная последовательность начинается с чисел $9, 10, 11, 11$.

Далее возможны случаи:

1.1) $a_5 = 11$

1.2) $a_5 \neq 11$

Пусть имеет место случай (1.1) $a_5 = 11$, тогда исходная последовательность начинается с чисел $9, 10, 11, 11, 11$. Эта последовательность порождает данную конечную.

Пусть имеет место случай (1.2) $a_5 \neq 11$, тогда задуманная последовательность имеет вид: $9, 10, 11, 11, a$, где $a > 11$.

Последним числом в данной конечной последовательности является $9+10+11+11+a > 52$. Противоречие.

Вывод: данный случай (1.2) места не имеет.

Рассмотрим случай (2) $a_4 \neq 11$.

В этом случае последовательность начинается с чисел: $9, 10, 11, a$ ($a \geq 19$).

Ясно, что $a \neq 19$, поскольку $10+19=29$ в конечном наборе отсутствует.

Ясно, что $a \neq 20$, поскольку $9+20=29$ в конечном наборе отсутствует.

Ясно, что $a \neq 21$, поскольку $9+10+11+21=51$ в конечном наборе отсутствует.

Если $a > 22$, то последним числом в конечной последовательности является $9+10+11+a > 52$. Противоречие.

Остался еще один возможный случай $a = 22$.

В этом случае исходная последовательность имеет вид $9, 10, 11, 22$. Нетрудно видеть, что эта последовательность порождает данную конечную.

Ответ для случая (в) : $9, 10, 11, 11, 11$ или $9, 10, 11, 22$.