С.Г.Бершадский С.И.Кублановский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

ДЕМО-ВЕРСИЯ

7 - 11 класс

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

простые решения трудных задач
огэ, егэ, олимпиады

Санкт-Петербург
XXI

С о с т а в и т е л и:
С.Г. Бершадский
С.И. Кублановский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ.
Пособие, 7-11 класс

Демонстрационная версия.

Продвинутые задачи по геометрии часто вызывают большие затруднения даже у способных учащихся. Для их решения приходится делать дополнительные построения. Как этому научиться? В пособии рассматриваются несколько наиболее распространенных типов таких построений. Приводятся упражнения для тренировки, закрепления и контроля. Дополнительная цель пособия состоит в развития логического мышления на базе поиска аналогий.

С о д е р ж а н и е

Демо-версия содержит целиком введение, §1 и   остальные параграфы частично.

Введение.

Эта книжка для тех, кто интересуется математикой и хочет развивать логическое мышление. Решение продвинутых геометрических задач - отличный полигон для этого. Оказывается, что некоторые задачи, весьма трудные даже для способных старшеклассников, могут быть решены простыми средствами, доступными учащимися седьмых и восьмых классов, с помощью небольших дополнительных построений, о которых здесь рассказывается. Эти короткие и красивые методы мы называем геометрическими этюдами.

Здесь, в §§ 1-2, на примере восьми задач рассматриваются наиболее типичные дополнительные построения. Для закрепления в §3 предлагается решить 28 специально подобранных упражнений на разные типы дополнительных построений. Все упражнения снабжены ответами и указаниями с поясняющими рисунками.

В отдельном параграфе собрана коллекция из четырнадцати геометрических задач, предлагавшихся на олимпиадах по математике в разных странах, для решения которых требуются дополнительные построения, рассмотренные в настоящем пособии. В заключительном параграфе представлены пять вариантов контрольных работ, позволяющих проверить, насколько читатель овладел этюдными методами решения геометрических задач.

Многие задания, собранные в этой книжке, взяты из открытых источников. Авторы обнаружили, что в ряде случаев известные решения этих задач были не полными, поскольку в них не было доказано **существование геометрического объекта, удовлетворяющего условию.** Мы в настоящем пособии исправляем этот недостаток.

Эта книга может быть использована учащимися 7-11 классов для подготовки к ОГЭ, ЕГЭ и к математическим олимпиадам. Она будет интересна учителям и любителям математики.

Дополнительно сообщаем, что весь курс продвинутой школьной геометрии изложен в книге одного из авторов: "Евклидова геометрия в задачах и упражнениях", которую можно скачать на авторском сайте://universalmathsolver.com.

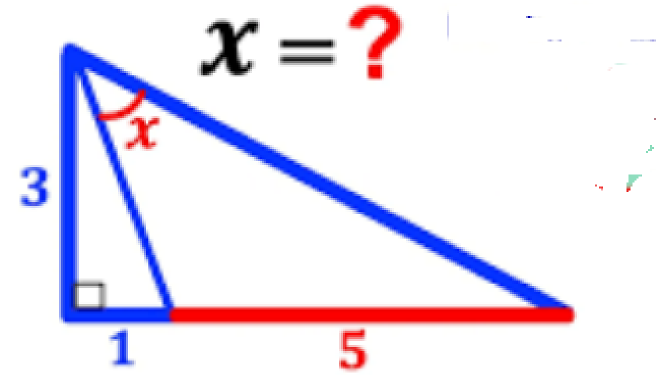
Успехов.

§1. Задания олимпиад, экзаменов, геометрические этюды.

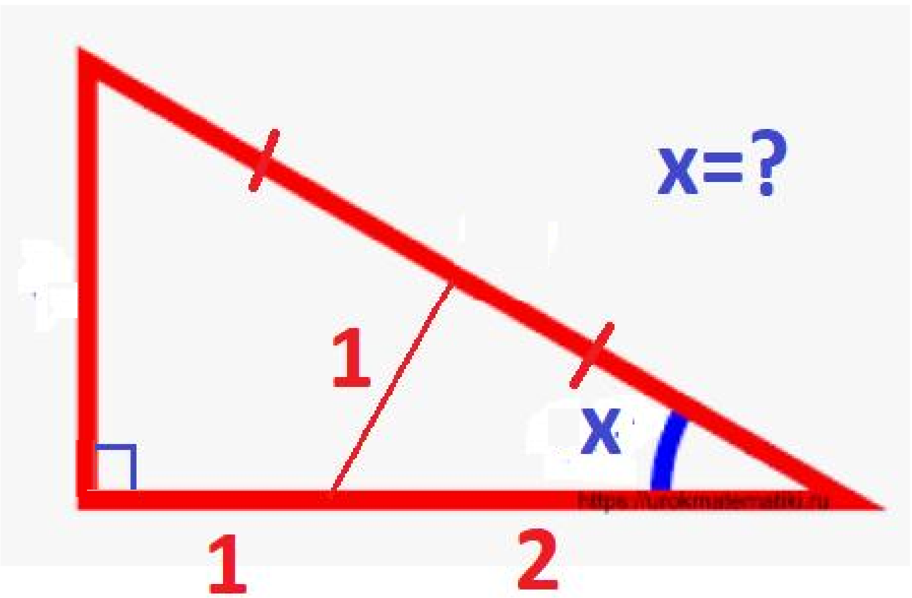
Здесь мы рассматриваем задания, для решения которых применяются наиболее типичные дополнительные построения. Предлагаем Вашему вниманию восемь задач, решение которых поможет Вам приобрести некоторый опыт таких построений. Для удобства и наглядности условия задач представлены в картинках. Все эти задачи имеют короткие и весьма красивые решения. Поэтому мы их назвали геометрическими этюдами.

Попробуйте сначала решить эти задания самостоятельно, не заглядывая в решение.

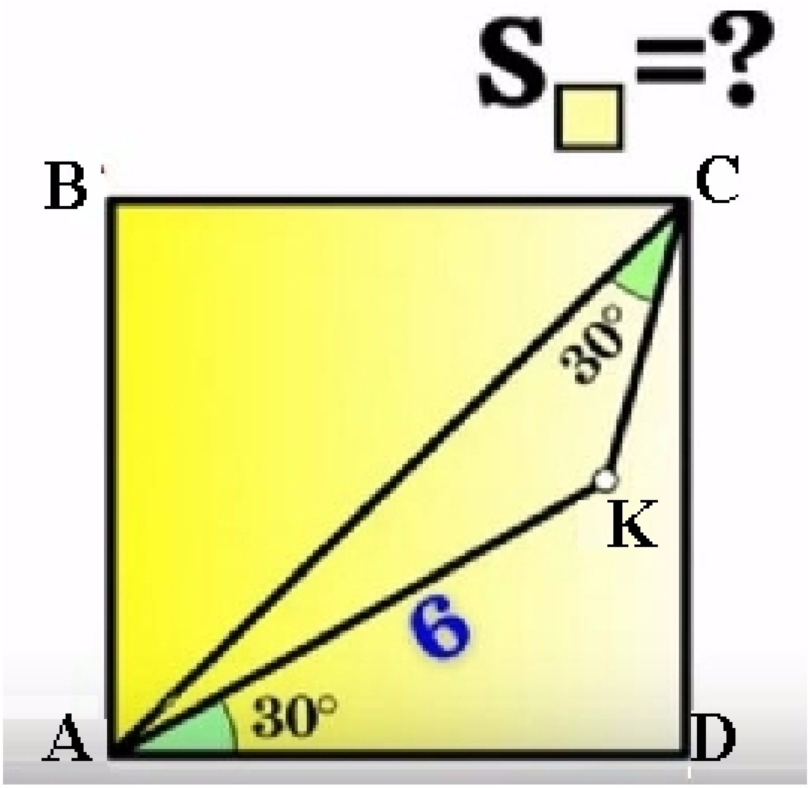
Задача 1



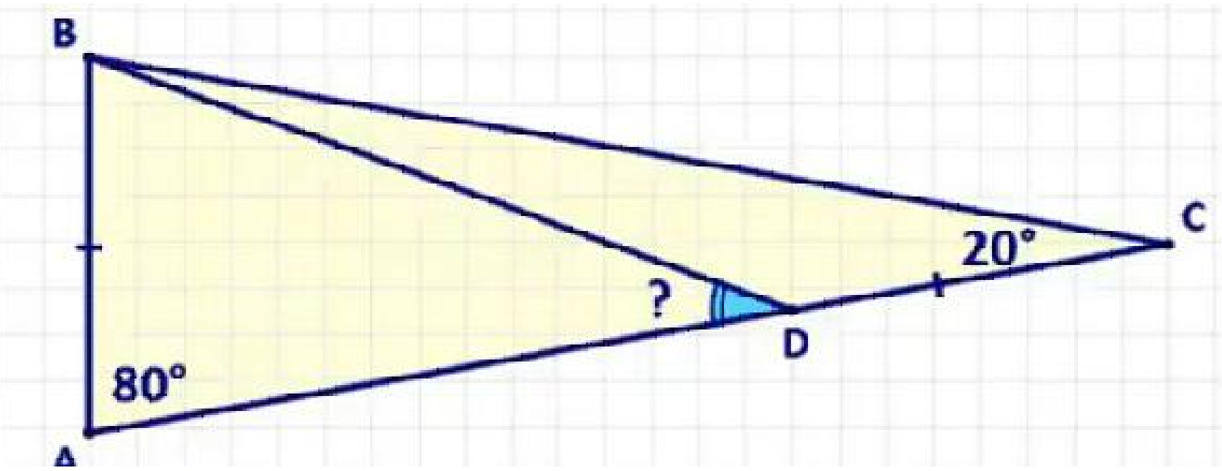
Задача 2



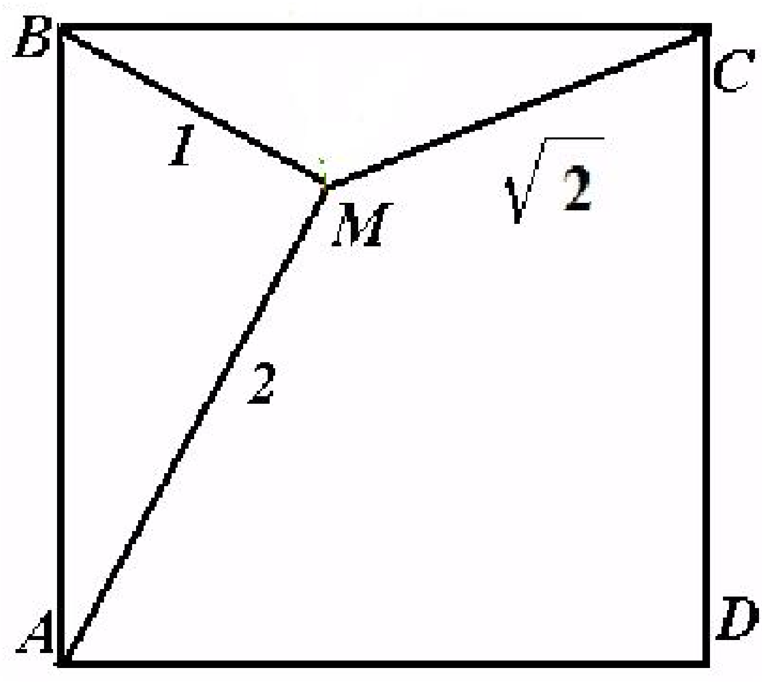
Задача 3



Задача 4

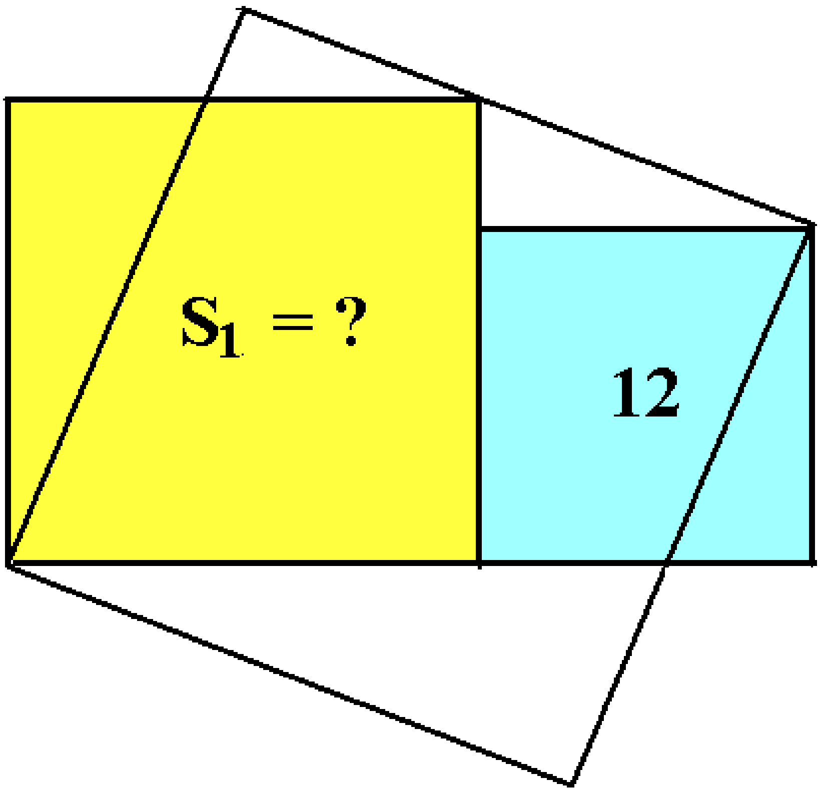


Задача 5

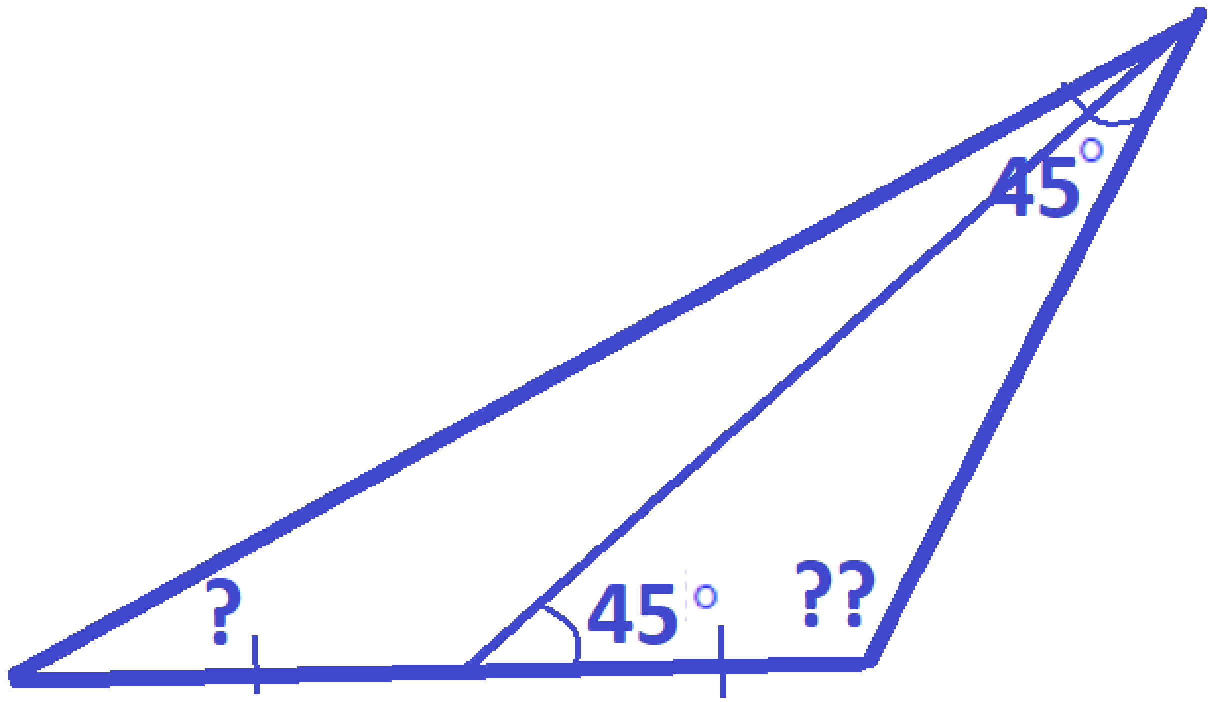


Найти площадь квадрата.

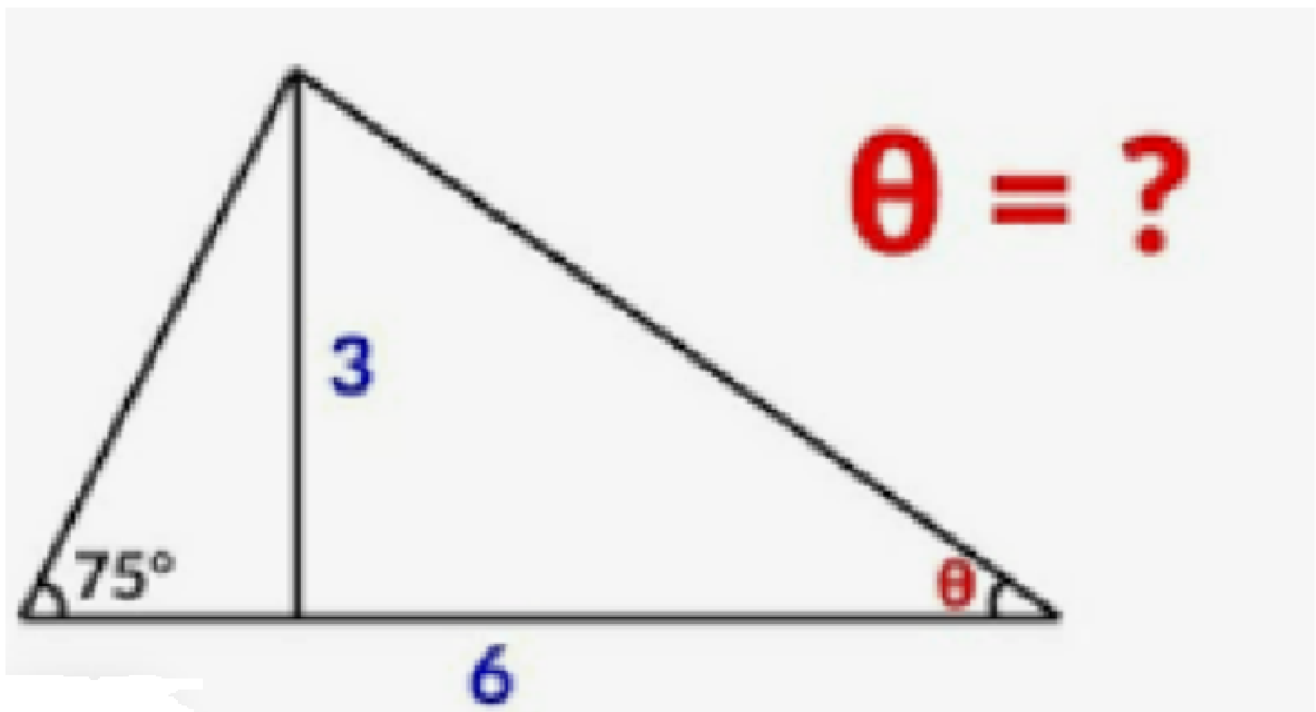
Задача 6. На рисунке три квадрата. Требуется найти площадь первого квадрата S_1 .



Задача 7.



Задача 8.

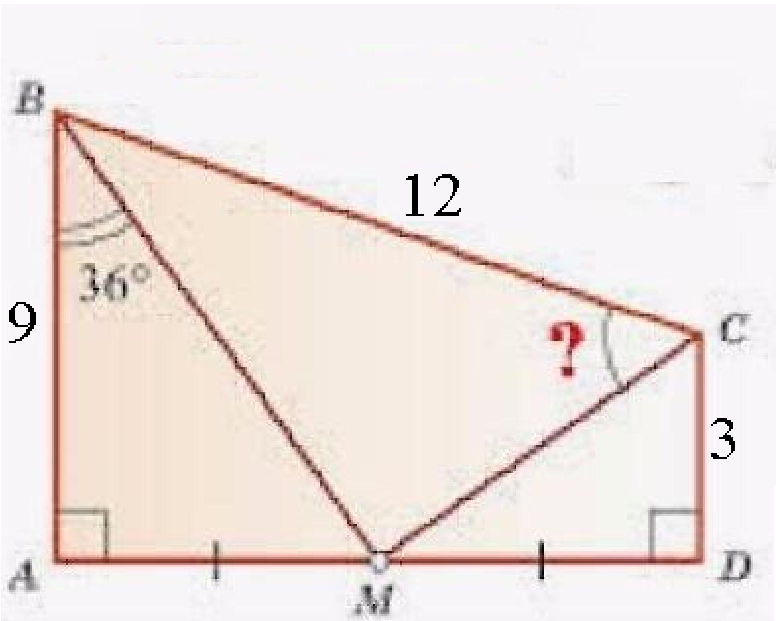


§2. Решения задач с помощью дополнительных построений.

Метод дополнительных построений часто позволяет получать решения задач без использования тригонометрии на базе знаний седьмого или восьмого класса.

- Следует отметить, что многие задачи, собранные в этой книжке, взяты из открытых источников. Эти задачи можно интерпретировать так: «Если существует геометрический объект с данным условием, то ответ задачи должен быть таким-то». Вопрос корректности здесь в известных решениях не поднимется. Это, на наш взгляд, не является правильным. Полнота решения задачи требует доказательства корректности постановки, а именно, доказательства **существования геометрического объекта, удовлетворяющего условию (в тех случаях, когда это не очевидно).** Поскольку, если такого объекта не существует, то, согласно формальной логике, ответов имеется бесконечное множество (в виду ложности посылки).

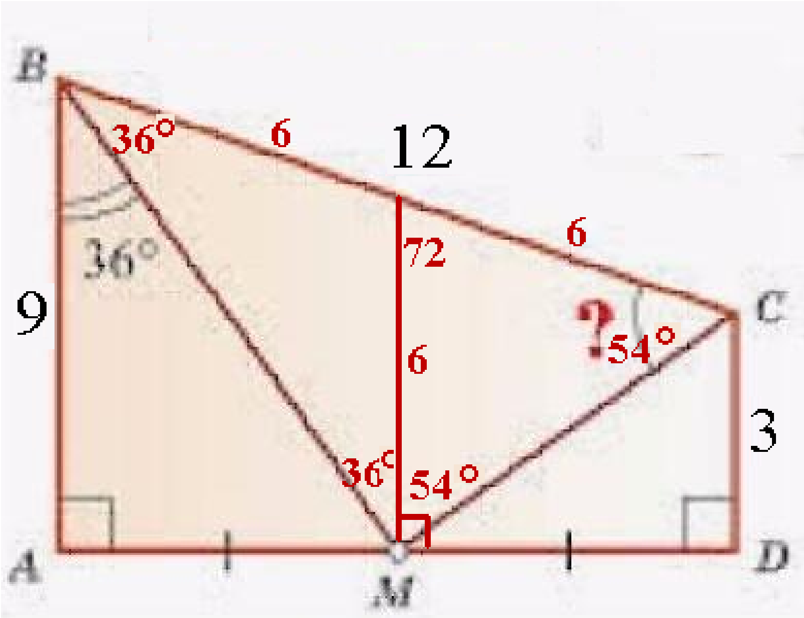
Проиллюстрируем это на следующем примере.



YouTube
China Math Olympiad | A Very Nice Geometry Problem.

Эту задачу можно решить так.

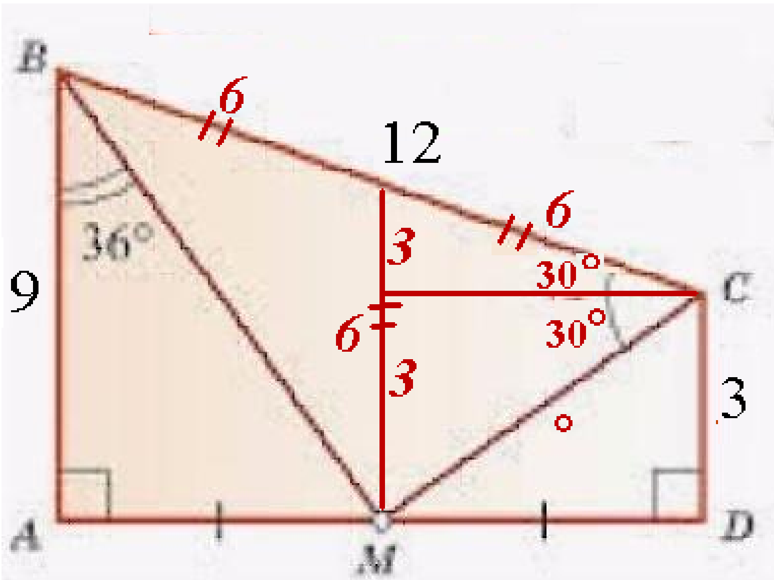
Первый способ. Дополнительное построение (см. рисунок).



Мы используем свойство средней линии трапеции, свойство параллельных прямых и равнобедренных треугольников.

Эту задачу можно решить и так.

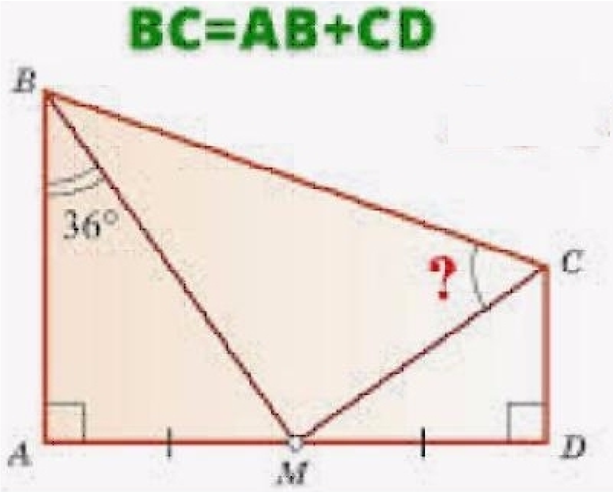
2 способ. Дополнительное построение (см. рисунок)



Мы используем свойство средней линии трапеции, свойство угла в $30°$ в прямоугольном треугольнике.

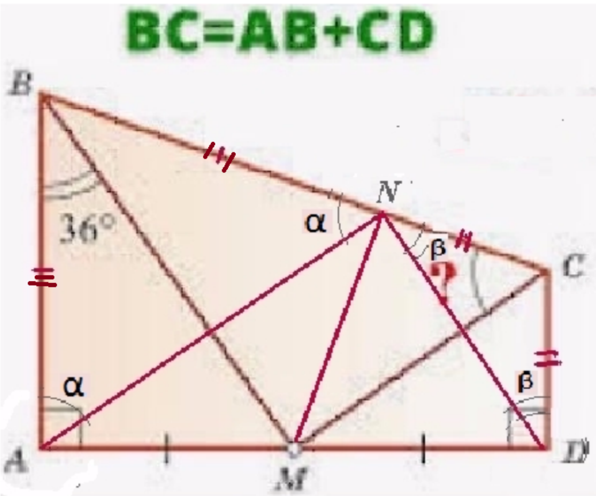
Итак, мы получили два разных ответа! Это противоречие получилось из-за некорректного условия задачи. Трапеции, удовлетворяющей условию этой задачи, не существует.

Корректное условие может выглядеть так.



Решение этой задачи, доступное семиклассникам (без использования теоремы 8 класса о средней линии трапеции) может выглядеть так.

Дополнительное построение: см. рисунок.



$\alpha+\beta=(180°-\angle B):2+(180°-\angle C):2=180°-(\angle B+\angle C):2=90°$

по свойствам параллельных прямых и равнобедренных треугольников.

Следовательно, ΔAND прямоугольный, из чего следует, что $NM=AM=MD$ по свойству медианы к гипотенузе прямоугольного треугольника.

Заключаем: $\Delta ABM=\Delta NBM$ и $\Delta MNC=\Delta MDC$ по трем сторонам.

Откуда BM и CM - биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$, соответственно. Значит, $\angle B = 72°$, и $? = \angle C:2$. Следовательно, $?=(180°-72°):2=54°$.

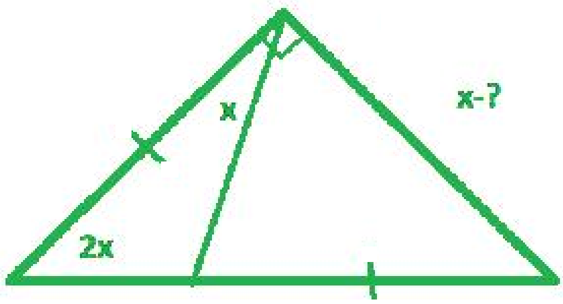
Существование трапеции, удовлетворяющей условию задачи с соответствующим углом $54°$, не вызывает сомнений.

Ответ: $54°$.

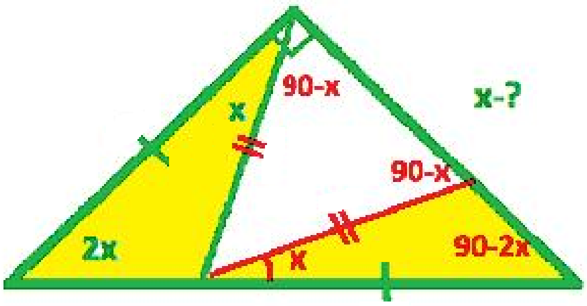
В настоящем пособии мы исправляем упомянутый ранее недостаток. А именно, в тех случаях, когда это не очевидно, предлагаем доказывать существование геометрической фигуры, удовлетворяющей условию задачи.

В ряде задач дополнительное построение сводится всего к одному дополнительному отрезку. Но бывает совсем не просто увидеть этот отрезок. Приведем примеры таких задач.

Пример 1

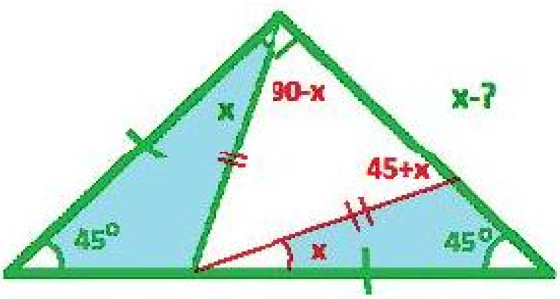


Решение. Дополнительное построение: (см. рисунок)



Расчет углов показывает, что получился равнобедренный не закрашенный треугольник (используем свойство внешнего угла треугольника). Образовалось два равных закрашенных треугольника (по первому признаку). Откуда $2x = 90° - 2x$, то есть $x = 22{,}5°$

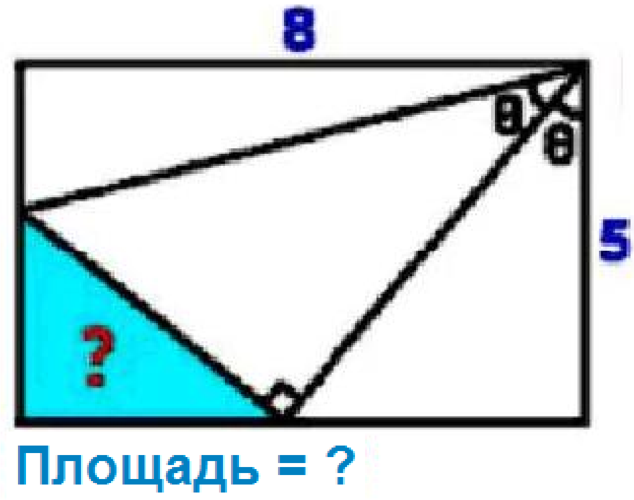
Проверка корректности. Существование треугольника с углом $x = 22{,}5°$ и удовлетворяющего условию задачи (см. рисунок)



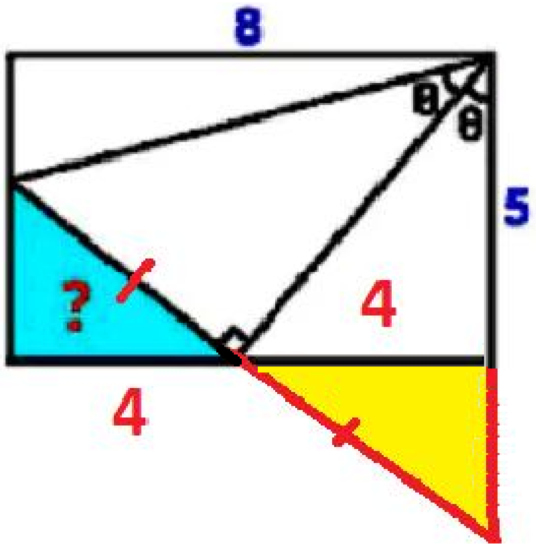
Здесь закрашенные треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (второй признак). Откуда получаем $90 - x = 45 + x$, то есть $x = 22{,}5$.

Ответ: $22{,}5°$

Пример 2.



Решение. Дополнительное построение: (см. рисунок)



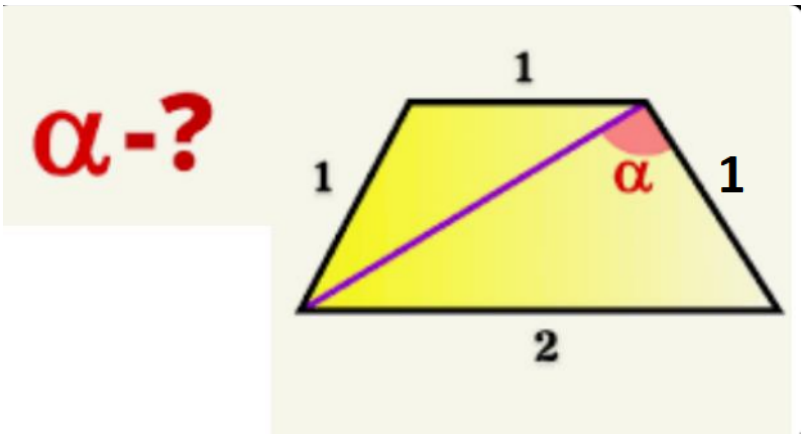
Получился равнобедренный треугольник (используем признак: биссектриса является высотой). Здесь закрашенные треугольники равны по гипотенузе и острому углу. Нетрудно увидеть на рисунке два подобных прямоугольных треугольника (по углам) с коэффициентом подобия $k=4/5=0,8$. Хорошо известно, что отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия. Площадь первого треугольника $S=\dfrac{4\cdot5}{2}=10$.

Откуда находим площадь второго $?=S\cdot0,8^2=10\cdot8^2=6,4$.

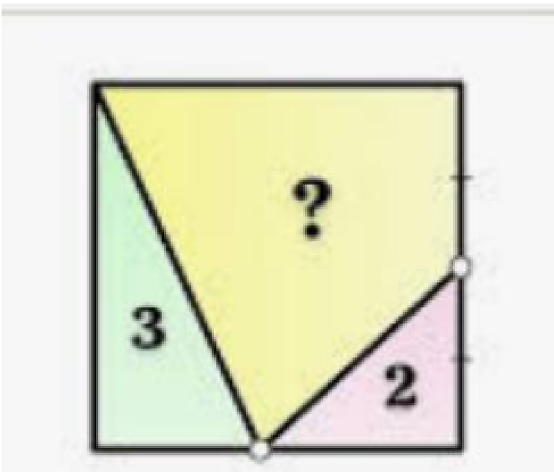
Ответ: $6,4$.

К следующим примерам, которые также решаются с помощью одного вспомогательного отрезка, мы даем только ответы (см. ответы в конце книжки). Решение этих задач (примеры 3-7) предлагается найти читателю самостоятельно, в качестве «этюдной разминки».

Пример 3.

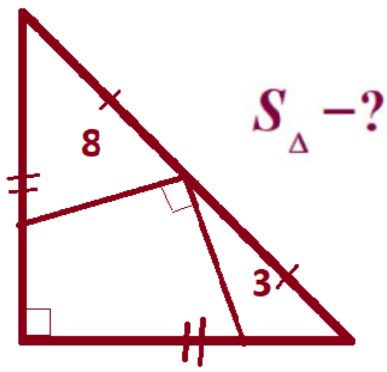


Пример 4



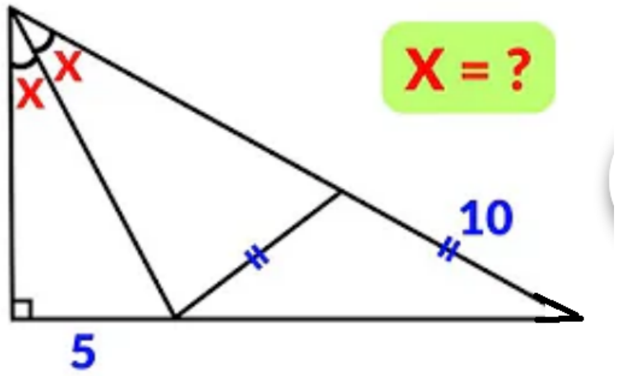
.

Пример 5



Пример 6.

Пример 7



Далее в этом параграфе приводятся решения задач из §1.

Задача №1.

1) На базе знаний 10-11 классов можно по формуле тангенса разности двух углов

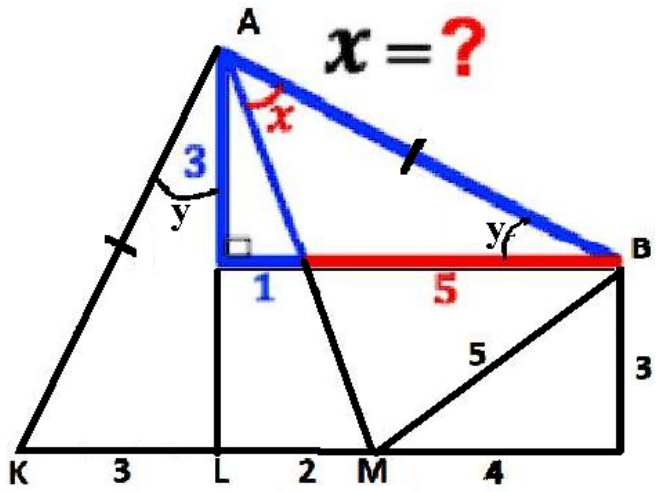
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 45^\circ$$

2) На базе знаний 9 класса, согласно теоремам косинусов и Пифагора, получаем:

$$\cos x = \frac{10+45-25}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}} = \frac{15}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$. Это эквивалентно равенству

$x = 45^\circ$.

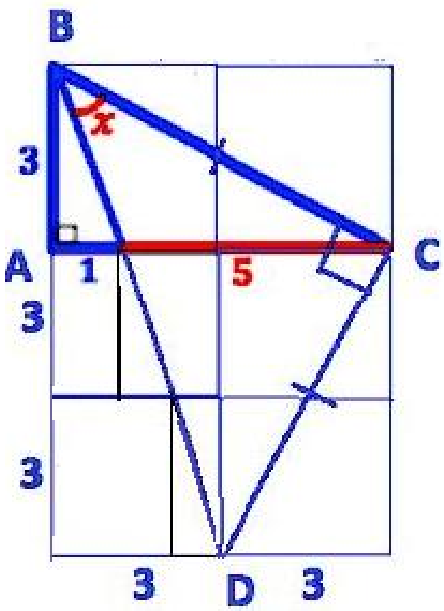
3) На базе знаний 8 класса делаем дополнительное построение (используем теорему о средней линии треугольника и теорему Пифагора).



Имеем $\triangle AKM = \triangle ABM$ по трем сторонам, откуда $\angle KAM = x$.

Получаем $2x = \angle KAM + x = y + \angle A = 90° \iff x = 45°$.

4) На базе знаний 7 класса. Дополнительное построение.



Заметить тройку равных (по катету и острому углу) прямоугольных треугольников.

Обратить внимание на то, что их горизонтальные катеты равны 1 . Заметить два равных (по двум катетам) треугольника с катетами 6 и 3 . Всё прочее читатель легко объяснит сам.

Ответ: $45°$.

Заметим, наконец, что существование треугольника, удовлетворяющего условию задачи №1, вполне очевидно.

Наша цель в настоящем пособии состоит в поиске коротких решений **на базе 7-8 класса**. Такие решения мы будем называть ***этюдными***. Однако заметим, что многие задачи в этой книжке допускают решения с помощью тригонометрии, и мы рекомендуем старшеклассникам находить такие решения самостоятельно для тренировки и сравнения с этюдными методами решения.

Решение остальных задач из §1 приводятся в полной версии.

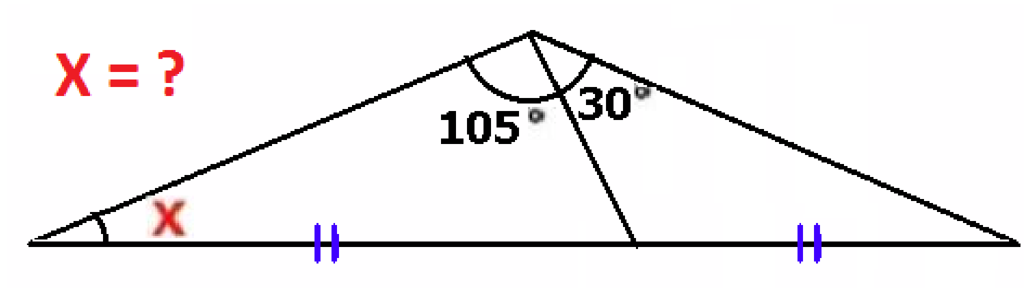
§3. Упражнения для самостоятельного решения.

Здесь мы предлагаем серию специально подобранных упражнений на различные типы дополнительных построений по мотивам рассмотренных этюдов. Для наглядности многие упражнения даются в картинках. В Демо-версии представлены только две задачи из 28

Упражнения

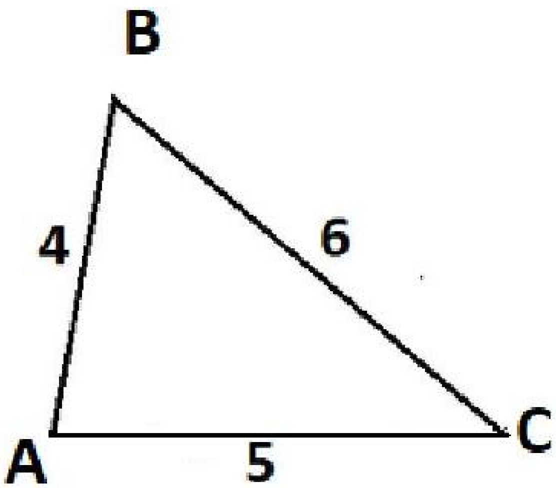
....

Упражнение 11.



....

Упражнение 19.



$$\angle A \overset{?}{=} 2\angle C$$

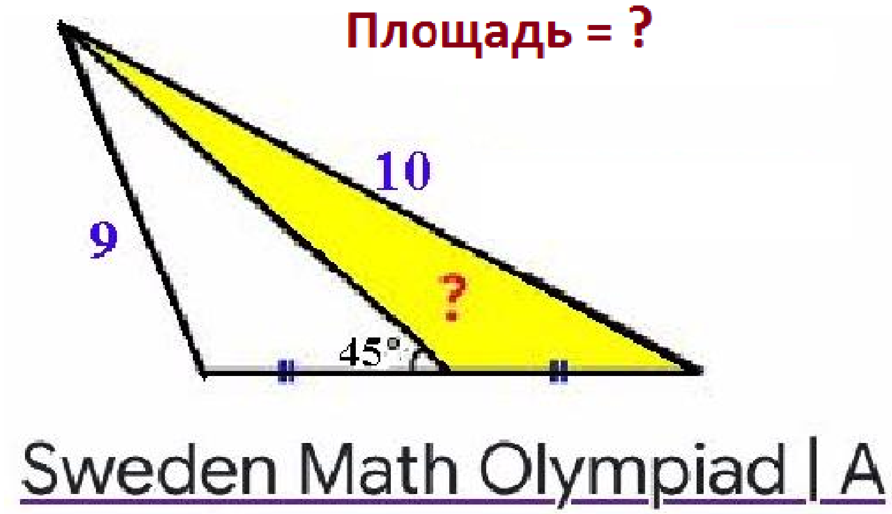
§4. Задания олимпиад разных стран.

Представленные здесь задачи решаются с помощью дополнительных построений, рассмотренных в предыдущих параграфах. Все задачи этого параграфа снабжены подробными указаниями и ответами. Попробуйте свои силы и попытайтесь решить эти задачи самостоятельно, не заглядывая в решения.

В Демо-версии представлены только две олимпиадные задачи из 14.

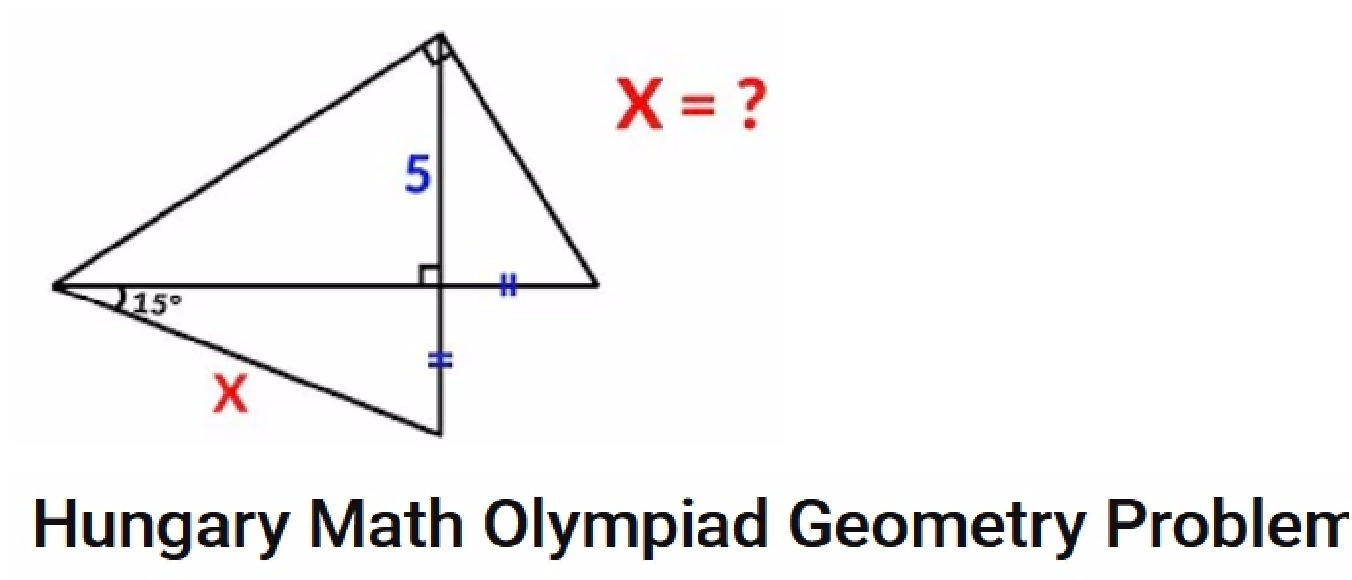
,,,,

Задача № 11 (Швеция).



....

Задача №14 (Венгрия).



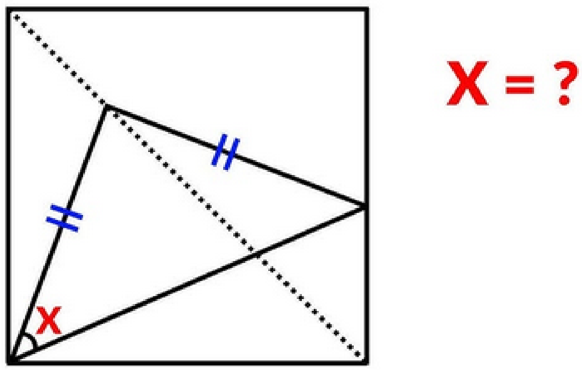
§5. Контрольные задания.

Здесь мы рассматриваем 5 вариантов контрольных заданий, позволяющих проверить, насколько читатель усвоил этюдные методы решений. В каждом варианте по пять задач. Ответы к контрольным заданиям приводятся в конце книжки. Для решения каждой из предложенных задач достаточно одной-двух строчек при удачном дополнительном построении. Найдите эти две строчки!

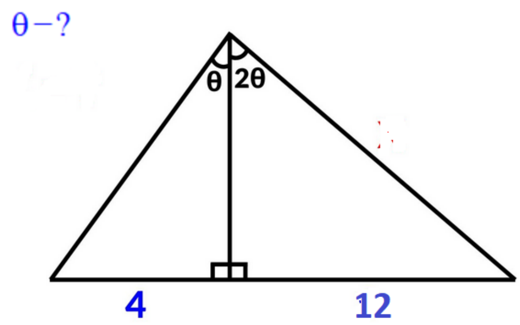
В демо-версии представлен только один вариант из пяти.

Вариант 5

З а д а н и е 1.

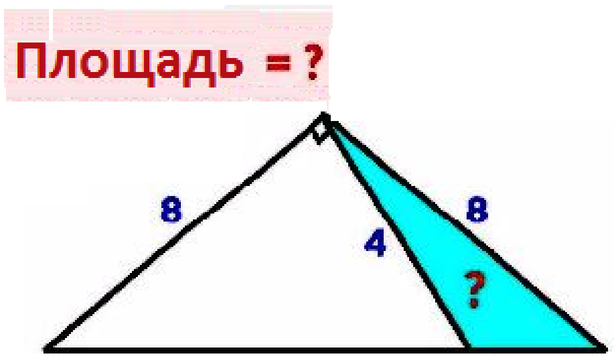


З а д а н и е 2

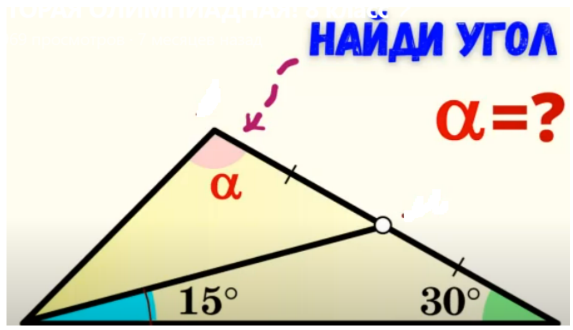


З а д а н и е 3

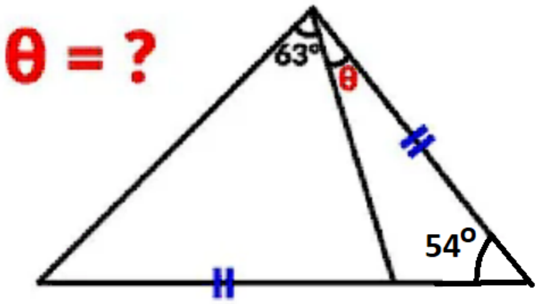
1.



З а д а н и е 4



З а д а н и е 5



Ответы и указания к упражнениям

Этот параграф не представлен в демо-версии.

Ответы и указания к олимпиадным задачам

Этот параграф не представлен в демо-версии.

Ответы к контрольным заданиям

В демо-версии представлены ответы к одному варианту.

Вариант 5

З а д а н и е 1

$x=45°$

З а д а н и е 2

$\theta=30°$

З а д а н и е 3

$9{,}6$

З а д а н и е 4

$105°$

З а д а н и е 5

$\theta=9°$

Ответы к примерам этюдной разминки.

Пример 3.

$\alpha = 90°$

Пример 4.

$S_? = 14 - 5 = 9$

Пример 5.

$$S_{\triangle} = 22$$

Пример 6.

$$S_{?} = 7$$

Пример 7.

В этом примере есть два случая и, соответственно, два ответа: $x = 7,5$, $x = 37,5$.