Решение некоторых заданий одного из вариантов досрочного экзамена ЭГЭ по математике в 2012 году, полученное с помощью программы UMS

B5 $\sqrt{x+28}=9$

Отметим ОДЗ.

$$\begin{cases} x+28\geq 0 \\ \sqrt{x+28}=9 \end{cases}$$

Воспользуемся свойством радикалов.

$$\begin{cases} x\geq -28 \\ x+28=9^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -28 \\ x+28=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -28 \\ x=53 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 53\geq -28 \\ x=53 \end{cases}$$

Следующее уравнение эквивалентно предыдущей системе.

$$x=53$$

Окончательный ответ: $x=53$

B7 $\log_5(3)\cdot\log_3(125)=$

Воспользуемся формулами перехода к новому основанию логарифма.

$$=\log_5(125)=$$

Воспользуемся свойством логарифмов.

$$=\log_5(5^3)=$$

Воспользуемся свойством логарифмов.

$$=3$$

B14 $y=11\ln(x+2)-11x+7$

Найти наибольшее значение функции на отрезке $[-1,5\ ;\ 0]$

Находим производную функции.

$$(11\ln(x+2)-11x+7)'=$$

Производная суммы равна сумме производных.

$$=(11\ln(x+2))'-(11x)'+(7)'=$$

Производная произведения константы и функции равна произведению константы на производную функции.

Производная константы равна нулю.

$$=(11\ln(x+2))'-11=$$

.

$$=11(\ln(x+2))'-11=$$

Воспользуемся таблицей производных элементарных функций.

$$=11\cdot\frac{(x+2)'}{x+2}-11=$$

$$=\frac{11(x+2)'}{x+2}-11=$$

$$=\frac{11\cdot 1}{x+2}-11$$

Итак, $y'=\dfrac{-11-11x}{x+2}$

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{-11-11x}{x+2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad -11-11x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1$$

Точка $x=-1$ принадлежит отрезку $[-1,5;0]$

При прохождении точки $x=-1$ производная y' меняет знак с + на - . Это означает , что $x=-1$ - это точка локального максимума.

Поэтому функция y в точке $x=-1$ принимает наибольшее значение.

$$y_{max}=11\ln(-1+2)-11\cdot(-1)+7=11\ln(1)+11+7=11\cdot 0+18=18$$

Ответ: наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке равно 18 .

С1 Решите уравнение $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$ и укажите все решения, принадлежащие промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

Решаем с помощью UMS систему:

$$\begin{cases} \log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2 \\ 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin 2x + 25 = 5^2 \\ 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin 2x = 0 \\ 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \\ 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x (1 - 2\sin x) = 0 \\ 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

Случай 1.

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2\pi \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le \frac{7\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3}{2} \le k \le 3 \end{cases}$$

Поскольку k - целое число и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то $k = 2$ или $k = 3$, тогда

$x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2 = \frac{5\pi}{2}$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 3 = \frac{7\pi}{2}$

Случай 2.

$$\left\{\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ 2\pi\le x\le\dfrac{7\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\dfrac{1}{2}+2\pi k\\ x=\pi-\arcsin\dfrac{1}{2}+2\pi k\end{array}\right.\\ 2\pi\le x\le\dfrac{7\pi}{2}\end{array}\right.$$

Случай 2.1

$$\left\{\begin{array}{l}x=\arcsin\dfrac{1}{2}+2\pi k=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\\ 2\pi\le x\le\dfrac{7\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\\ 2\pi\le\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\le\dfrac{7\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\\ \dfrac{11}{12}\le k\le\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$$

Поскольку k - целое число и $\dfrac{11}{12}\le k\le\dfrac{5}{3}$, то $k=1$, тогда

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 1=\frac{13\pi}{6}$$

Случай 2.2

$$\left\{\begin{array}{l}x=\pi-\arcsin\dfrac{1}{2}+2\pi k=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\\ 2\pi\le x\le\dfrac{7\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\\ 2\pi\le\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\le\dfrac{7\pi}{2}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{7}{12} \le k \le \frac{4}{3} \end{cases}$$

Поскольку k - целое число и $\frac{7}{12} \le k \le \frac{4}{3}$, то $k=1$, тогда

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{17\pi}{6}$$

Окончательный ответ (в порядке возрастания): $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.

Мы использовали $\frac{5\pi}{2} = \frac{15\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{2} = \frac{21\pi}{6}$.

С 3 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 \le 0 \\ \log_{x^2}\left(\left(x-1\right)^2\right) \le 1 \end{cases}$$

Это задание легко решает программа UMS.

Решение.

Каждое неравенство можно решить по отдельности , а, затем, найти пересечение полученных решений.

Решаем первое неравенство.

$$4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 \le 0$$

Воспользуемся свойством степеней.

Произведем замену переменных.

$$\begin{cases} a = 2^x \\ 4a^2 - 33a + 8 \le 0 \end{cases}$$

$$4a^2 - 33a + 8 \le 0$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$$4a^2-33a+8=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=(-33)^2-4\cdot 4\cdot 8=961$$

Дискриминант положителен, значит, уравнение имеет два корня.

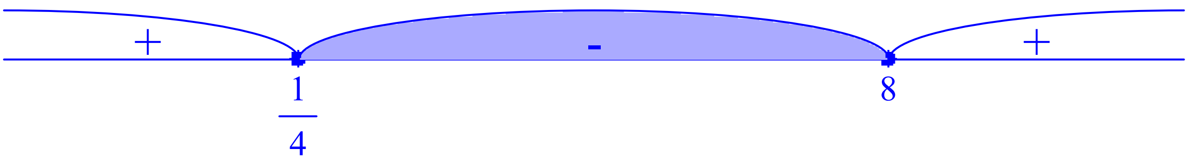
Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения.

$$a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$a_1=\frac{33-31}{2\cdot 4}=\frac{1}{4}\ ;\ a_2=\frac{33+31}{2\cdot 4}=8$$

Следующее неравенство равносильно данному.

$$4\left(a-\frac{1}{4}\right)(a-8)\le 0$$



$$\frac{1}{4}\le a\le 8$$

$$\frac{1}{4}\le 2^x\le 8\quad\Leftrightarrow\quad 2^{-2}\le 2^x\le 2^3\quad\Leftrightarrow\quad -2\le x\le 3$$

Ответ первого неравенства: $-2\le x\le 3$

Решаем второе неравенство:

$$\log_{x^2}\left((x-1)^2\right)\le 1$$

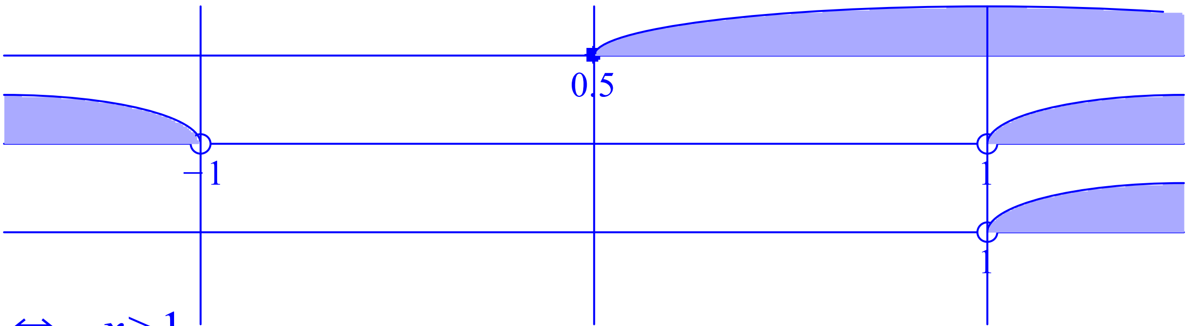
Это неравенство распадается на два:

Случай 1.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2>1 \\ \log_{x^2}\left((x-1)^2\right)\le\log_{x^2}\left(x^2\right)\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2>1 \\ (x-1)^2\le x^2\end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-1>0 \\ x^2-2x+1-x^2\le 0\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)(x+1)>0 \\ 2x-1\ge 0\end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\ge 0,5 \\ (x-1)(x+1)>0\end{array}\right|$$

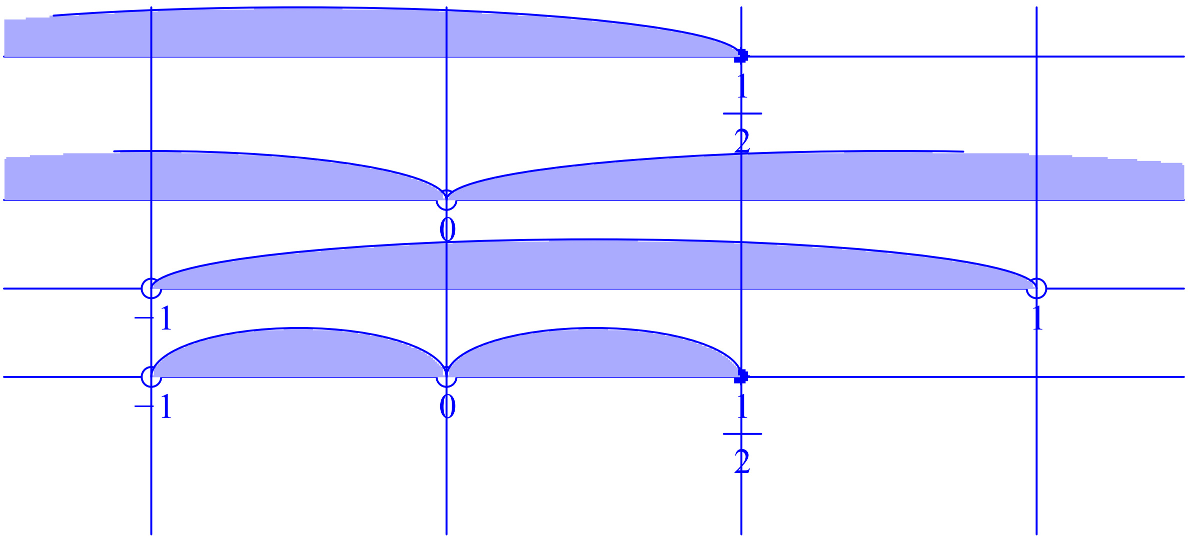


$$\Leftrightarrow \quad x>1$$

Случай 2

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x^2<1 \\ \log_{x^2}\left((x-1)^2\right)\le\log_{x^2}\left(x^2\right)\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<x^2<1 \\ (x-1)^2\ge x^2\end{array}\right|$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x^2<1 \\ 2x-1\le 0\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le\dfrac{1}{2} \\ x^2>0 \\ x^2<1\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le\dfrac{1}{2} \\ x\ne 0 \\ -1<x<1\end{array}\right|$$



Объединяя решения первого и второго случаев, получим ответ второго неравенста системы:

$$\left[\begin{cases} -1 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x \ne 0 \end{cases}\right. \quad \text{или} \quad x > 1$$

Теперь найдем пересечение решений первого и второго неравенств системы и получим

Окончательный ответ : $\left[\begin{cases} -1 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x \ne 0 \end{cases}\right.$ или $1 < x \le 3$

С5 Найти все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$ на множестве $1 \le |x| \le 3$ было бы не меньше 6 .

Решение.

Преобразуем выражение (воспользуемся формулой квадрата суммы)

$$f(x) = (2x + a)^2 - 2a + 2$$

Функция $f(x)$ принимает наименьшее значение на всей числовой оси при условии

$$(2x + a)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

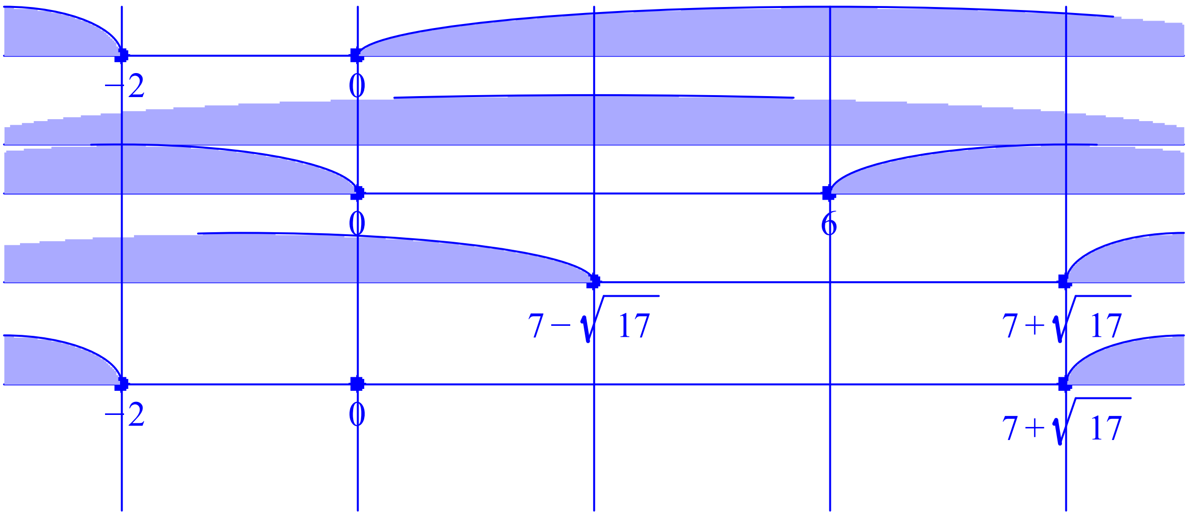
$$x = -\frac{a}{2} \ .$$

Наименьшее значение $f(x)$ при $x=-\dfrac{a}{2}$ равно $-2a+2$.

Чтобы было выполнено условие задания необходимо выполнение системы неравенств:

$$(*)\ \begin{cases} f(1)\geq 6 \\ f(3)\geq 6 \\ f(-1)\geq 6 \\ f(-3)\geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot 1+4a\cdot 1+a^2-2a+2\geq 6 \\ 4\cdot 9+4a\cdot 3+a^2-2a+2\geq 6 \\ 4\cdot 1+4a\cdot(-1)+a^2-2a+2\geq 6 \\ 4\cdot 9+4a\cdot(-3)+a^2-2a+2\geq 6 \end{cases}$$

Эту систему неравенств легко решает программа UMS (каждое неравенство решается по отдельности и, затем, находится пересечение полученных решений).



$a\leq -2;$ или $a=0;$ или $a\geq 7+\sqrt{17}$

Рассмотрим отдельные случаи.

1) $a\leq -2$

В этом случае наименьшее значение функции $f(x)$, равное $-2a+2$, будет больше или равно 6 , то есть условие задания выполнено.

2) $a=0$.

В этом случае вершина параболы $x=-\dfrac{a}{2}=0$ не принадлежит множеству $1\leq |x|\leq 3$, поэтому наименьшее значение на рассматриваемом множестве (которое является объединением двух отрезков) функция принимает в одной из граничных точек.

Поэтому в этом случае выполнение системы (*) является достаточным условием выполнимости требования задания.

Вывод: $a=0$ удовлетворяет условию задания.

3) $a \geq 7+\sqrt{17}$.

В этом случае вершина параболы $x=-\frac{a}{2} \leq -\frac{7+\sqrt{17}}{2} \leq -3$ и не принадлежит множеству $1 \leq |x| \leq 3$, поэтому наименьшее значение на рассматриваемом множестве (которое является объединением двух отрезков) функция принимает в одной из граничных точек.

Поэтому в этом случае выполнение системы (*) является достаточным условием выполнимости требования задания.

Вывод: $a \geq 7+\sqrt{17}$ удовлетворяет условию задания.

Полученное означает, что решение системы (*) дает все искомые значения параметра a .

Ответ: $a \leq -2;$ или $a=0;$ или $a \geq 7+\sqrt{17}$.

С6 Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$ по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0 ?

б) Может ли в результате получиться 1 ?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) 0 получиться не может, поскольку в противном случае один из сомножителей $x+y=0$, следовательно $y=-x$. Но среди 10 данных чисел нет противоположных и нуля (если $y=x$, то $x+x=0$, откуда $x=0$)

б) 1 получиться не может. Ибо в противном случае все сомножители должны равняться 1 по модулю.

Если на карточке с одной стороны написана 1 , то с другой стороны должно быть написано y такое, что $|1+y|=1 \Leftrightarrow y=0$ (такого числа нет на карточке) или $y=-2$. Это означает, что есть пара 1 и -2 на одной карточке и пара -2 и 1 на другой карточке.

Аналогично доказывается, что есть пара -3 и 4 и пара 4 и -3 .

Тогда для карточки с надписью -5 не найдется ни одного числа z (отличного от 4 , которое уже занято) из написанных, для которого $|-5+z|=1$. Противоречие.

в) $(1+(-2))\cdot(-2+1)\cdot(-3+4)\cdot(4+(-3))\cdot(-5+7)\cdot(7+(-5))\cdot$
$\cdot(-8+9)\cdot(9+(-8))\cdot(-11+10)\cdot(10+(-11))=2\cdot 2=4$

Покажем, что наименьшее целое неотрицательное число P , которое может в результате получиться равно 4 . Предположим противное .

Обозначим числа на i карточке x_i и y_i ($i=1,2,...10$)

Пусть $x_i+y_i=z_i$ и, предположим, что $0\le P=z_1\cdot z_2\cdot\cdot\cdot\cdot z_{10}<4$. Мы уже доказали, что $P\ne 0$ и $P\ne 1$ и $P\le 4$. Следовательно, $P=2$ или $P=3$.

Мы уже показали в пункте (б) , что равенство $|z_i|=1$ для всех i невозможно.

Предположим, что неравенство $|z_i|\ne 1$ выполнено только для одной карточки. Без ограничения общности будем считать, что это десятая карточка.

Рассмотрим возможные случаи : $|z_{10}|=2$ или $|z_{10}|=3$ или $|z_{10}|\ge 4$

Если $|z_{10}|=2$ то z_{10} - четное число, а числа z_i - нечетные (для всех $i=1,2...9$) , поскольку $|z_i|=1$. Поэтому сумма $z_1+z_2+\cdots+z_9+z_{10}$ - нечетное число.

Но $z_1+z_2+\cdots+z_9+z_{10}=(x_1+x_2+\cdots+x_{10})+(y_1+y_2+\cdots+y_{10})=2S$ - четное число. Противоречие.

Если $|z_{10}|=3$, то $x_i+y_i=\pm 3$. Но таких чисел нет среди написанных!

Если $|z_{10}|\ge 4$, то $P\ge|z_{10}|\ge 4$. Противоречие!

Следовательно, неравенство $|z_i|\ne 1$ выполнено более, чем на одной карточке.

Это означает, что $P=|P|=|z_1\cdot z_2..z_{10}|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot....|z_{10}|\ge 2\cdot 2=4$. Противоречие.

Вывод: наименьшее целое неотрицательное число, которое может в результате получиться равно 4 .