ЕГЭ от 7 ИЮНЯ 2012 г.
РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ С1-С6 ПО МАТЕМАТИКЕ

С1

$$\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$$

а) решить уравнение

б) найти корни на промежутке $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$

Решение. © UMS Team, 2012, http://www.umsolver.com

$$\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$$
$$(2\cos^2 x - 1) + 0,5 = \cos^2 x$$
$$2\cos^2 x - 1 + 0,5 = \cos^2 x$$
$$2\cos^2 x - 0,5 = \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = 0,5$$

Преобразуем уравнение.

Следующая система эквивалентна предыдущему уравнению.

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Воспользуемся формулой для решения простейших тригонометрических уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = -\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Случай 2 .

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Воспользуемся формулой для решения простейших тригонометрических уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ x = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$$

а) ответ уравнения : $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k -$ любое целое.

б) Для каждой из 4 серий ответов выберем те значения, которые лежат в промежутке

$$[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$$

б1) $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \geq -2\pi \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \geq -2\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2\pi k \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\pi k \geq -\frac{7\pi}{4} \\ 2\pi k \leq -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ (разделим обе части неравенства на положительное число 2π)

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{7}{8} \\ k \leq -\frac{1}{8} \end{cases}$ Целых решений нет !

б2) $\begin{cases} \frac{\pi}{4}+2\pi k\ge -2\pi \\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\le -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k\ge -2\pi-\frac{\pi}{4} \\ 2\pi k\le -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k\ge -\frac{9\pi}{4} \\ 2\pi k\le -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$

(разделим обе части неравенства на положительное число 2π)

$\begin{cases} k\ge -\frac{9}{8} \\ k\le -\frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \quad k=-1$

Ответ этого случая: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi(-1)=-\frac{7\pi}{4}$

б3) $\begin{cases} -\frac{3\pi}{4}+2\pi k\ge -2\pi \\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k\le -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k\ge -2\pi+\frac{3\pi}{4} \\ 2\pi k\le -\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\pi k\ge -\frac{5\pi}{4} \\ 2\pi k\le \frac{\pi}{4} \end{cases}$ (разделим обе части неравенства на положительное число 2π)

$\begin{cases} k\ge -\frac{5}{8} \\ k\le \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \quad k=0$

Ответ этого случая: $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot(0)=-\frac{3\pi}{4}$

б4) $$\begin{cases} \frac{3\pi}{4}+2\pi k\ge -2\pi \\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\le -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k\ge -2\pi-\frac{3\pi}{4} \\ 2\pi k\le -\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k\ge -\frac{11\pi}{4} \\ 2\pi k\le -\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

(разделим обе части неравенства на положительное число 2π)

$$\begin{cases} k\ge -\frac{11}{8} \\ k\le -\frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \quad k=-1$$

Ответ этого случая: $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi(-1)=-\frac{5\pi}{4}$

Окончательный ответ (б) : $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$.

Это задание может быть решено программой UMS - www.umsolver.com. Надо ввести в программу систему:

$$\begin{cases} \cos 2x+0,5=\cos^2 x \\ -2\pi\le x\le -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

C2

Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка E лежит на стороне AA_1, причем, $AE:EA_1=3:1$, сторона основания равна 3, длина бокового ребра равна 4. Найти угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение. © UMS Team, 2012, http://www.umsolver.com

Дано:

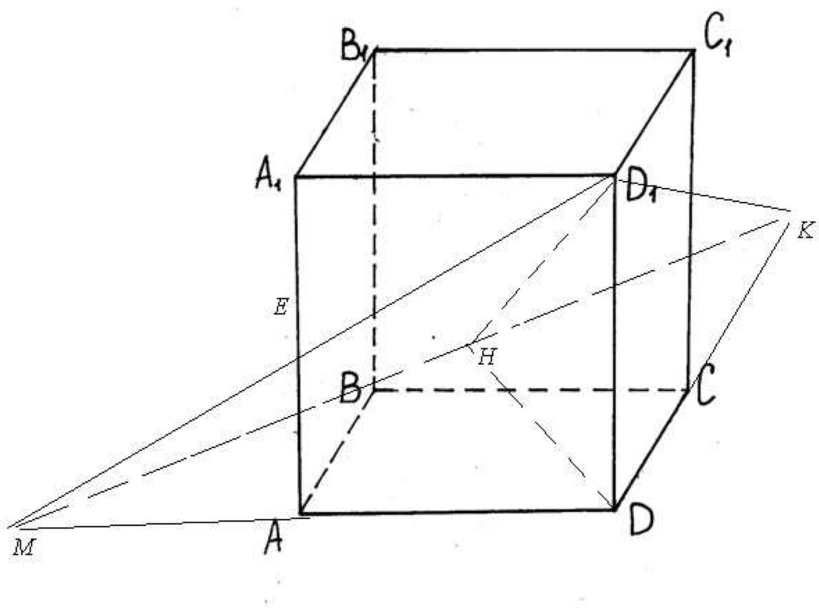
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ правильная четырехугольная призма;

$ABCD-$ квадрат со стороной $AB=3$

$AA_1=4$;

$E\in AA_1$, $AE:EA_1=3:1$

Найти угол между плоскостями ABC и BED_1



В плоскости AA_1D_1D проведем прямую D_1E до пересечения с прямой AD в точке M.

В плоскости $ABCD$ проведем прямую MB до пересечения с прямой DC в точке K. Пусть DH - высота треугольника ΔMKD.

По теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp MK$

По определению угол $\angle DHD_1$ - плоский угол двуграннного угла между рассматриваемыми плоскостями.

Из подобия треугольников $MA : A_1D_1 = AE : EA_1$.

Отсюда следует $MA : 3 = 3 : 1 \Rightarrow MA = 9$

Из подобия треугольников $CK : BC = AB : MA$

Отсюда следует $CK : 3 = 3 : 9 \Rightarrow CK = 1$

Высота в прямоугольном треугольнике, опущенная на гипотенузу, равна отношению произведения катетов на гипотенузу.

$$HD = \frac{MD \cdot DK}{MK} = \frac{(9+3) \cdot (3+1)}{\sqrt{12^2 + 4^2}} = \frac{48}{\sqrt{160}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{DHD_1} = \frac{DD_1}{HD} = 4 : \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$, откуда

$$\widehat{DHD_1} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}}{3}$

С3

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3 - 0,25^x}{2 - 2^{-x}} \geq 1,5 \\ \log_{x^2}(x+2) \leq 1 \end{array} \right|$$

Решение. © UMS Team, 2012, http://www.umsolver.com

Решаем неравенство $\dfrac{3 - 0,25^x}{2 - 2^{-x}} \geq 1,5$ с помощью метода замены переменных

$$\left\{\begin{array}{l} a=2^{-x} \\ \dfrac{3-a^2}{2-a} \geq 1,5 \end{array}\right|$$

Рациональное неравенство $\dfrac{3-a^2}{2-a} \geq 1,5$ решается стандартным образом $\Leftrightarrow$

$0 \leq a \leq \dfrac{3}{2}$ или $a>2$, то есть $0 \leq 2^{-x} \leq \dfrac{3}{2}$ или $2^{-x}>2$

$\Leftrightarrow$ $-x \leq \log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$ или $-x>1$ $\Leftrightarrow$

$x<-1$ или $x \geq \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)$

Неравенство $\log_{x^2}(x+2) \leq 1$ равносильно

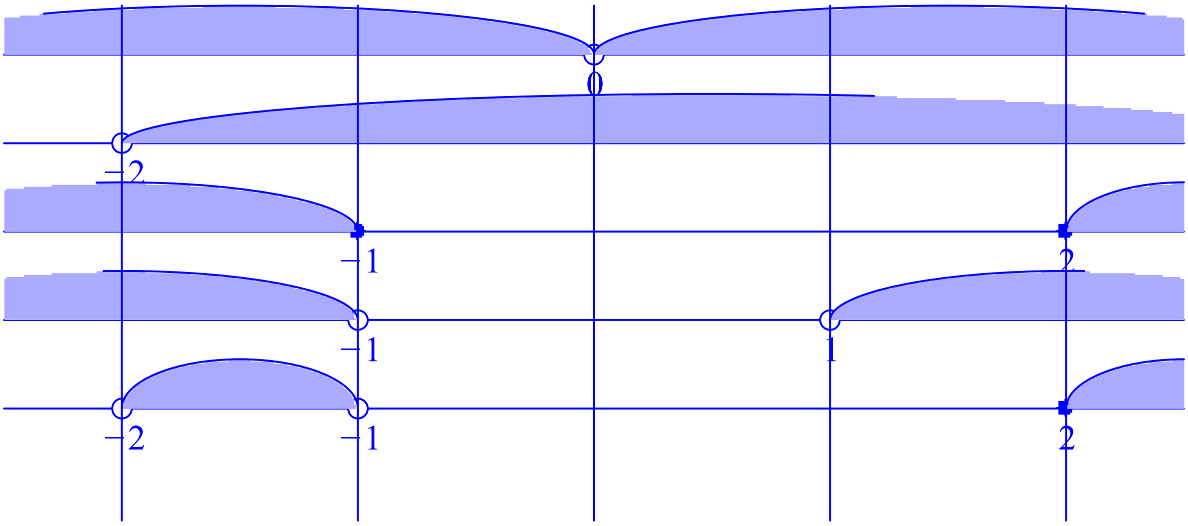
$$\left\{\begin{array}{l} x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x>-2 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x+2 \leq x^2 \\ x^2>1 \end{array}\right| \\ \left\{\begin{array}{l} x+2 \geq x^2 \\ x^2<1 \end{array}\right| \end{array}\right| \end{array}\right|$$

Решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x>-2 \\ x+2 \leq x^2 \\ x^2>1 \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -2 \\ x+2 \leq x^2 \\ x^2 > 1 \end{cases}$$



Решаем каждое неравенство по отдельности , а, затем, находим пересечение решений.

Полученные решения отметим на рисунках.

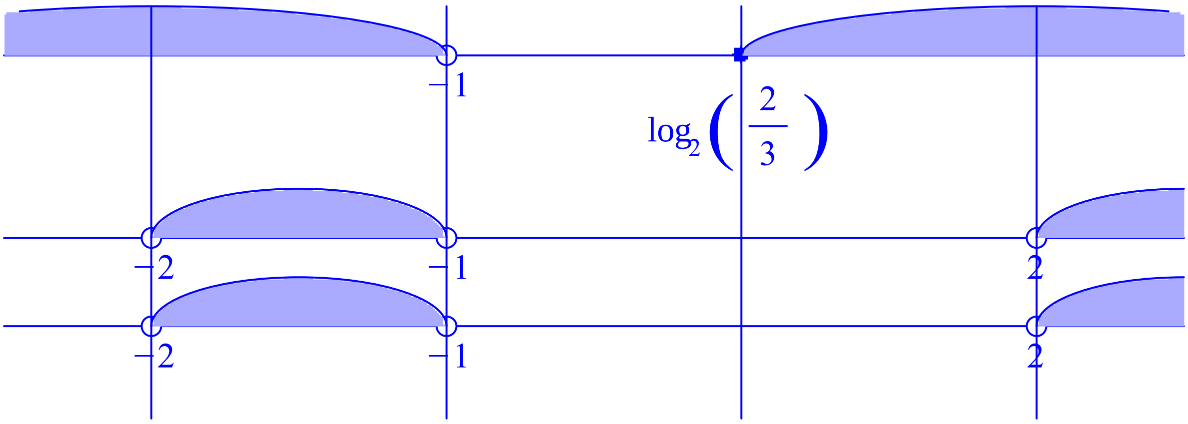
Находим общее решение.

Ответ: $-2 < x < -1;\ x \geq 2$

В пересечении с решением первого неравенства. получаем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x \geq \log_2 \left(\dfrac{2}{3} \right) \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} -2 < x < -1 \\ x > 2 \end{array} \right. \end{cases}$$

Находим общее решение.

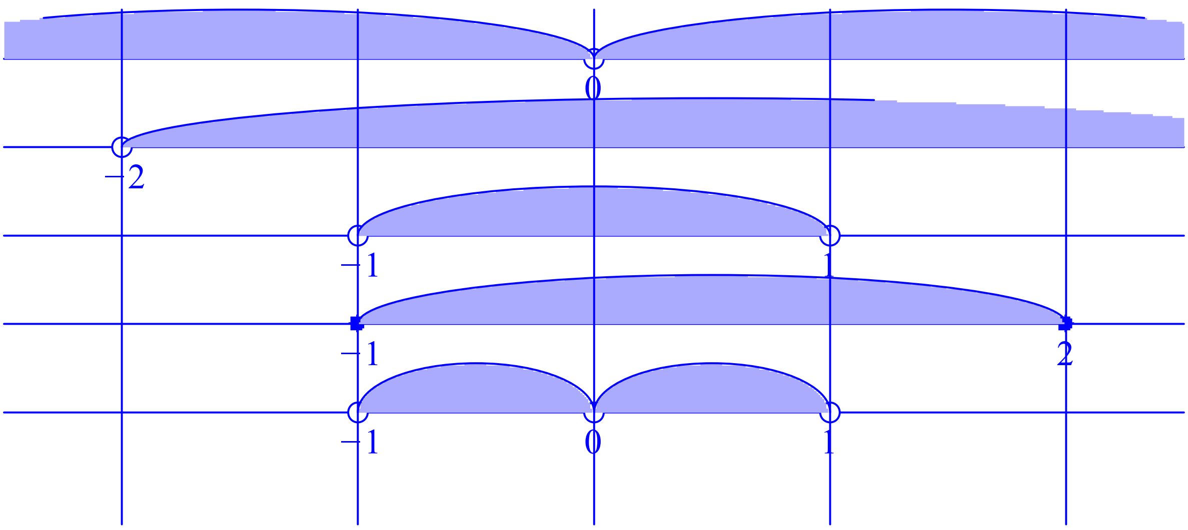


Ответ для случая 1 : $-2<x<-1;\ x>2$

Случай 2 .

$$\begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x > -2 \\ x+2 \geq x^2 \\ x^2 < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \neq 0 \\ x > -2 \\ x+2 \geq x^2 \end{cases}$$

Находим общее решение.



Ответ: $-1<x<0;\ 0<x<1$

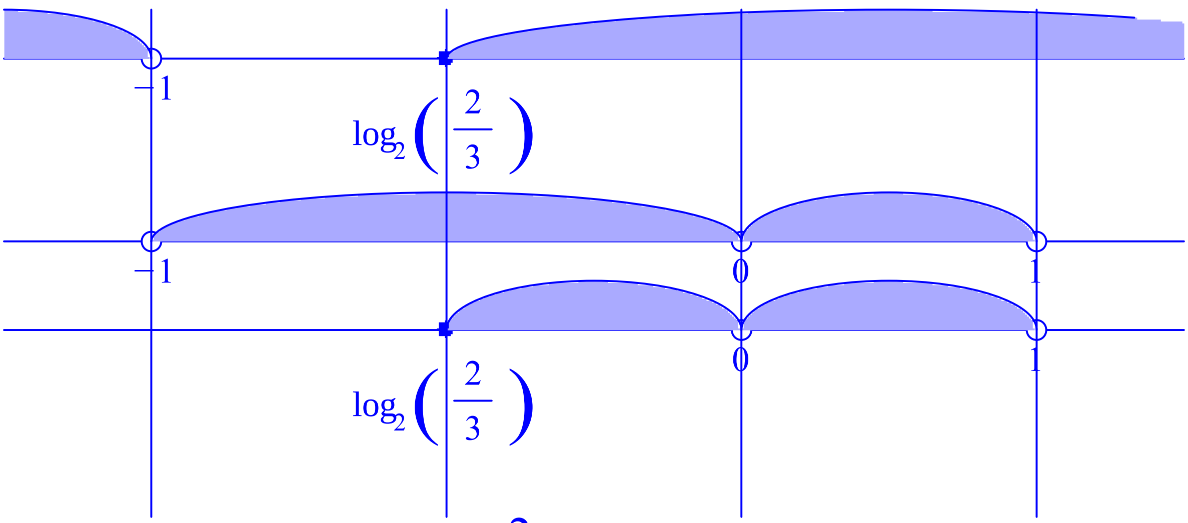
В пересечении с решением первого неравенства, получаем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x\geq \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 0<x<1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Полученные решения отметим на рисунках.

Найдем объединенное решение.

Находим общее решение.



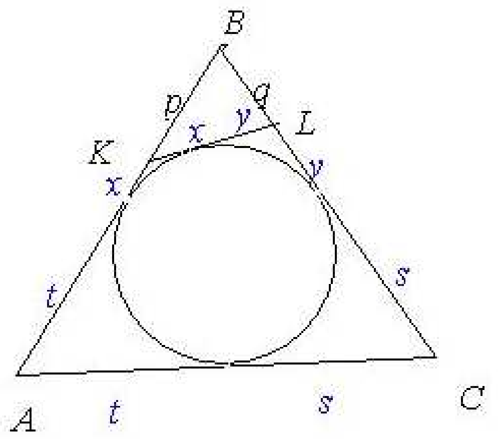
Ответ для случая 2 : $\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)\leq x<0;\ 0<x<1$

Окончательный ответ : $-2<x<-1$, или $\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)\leq x<0$, или $0<x<1$, или $x>2$.

Это решение может быть получено с помощью программы UMS - www.umsolver.com.

C4

Дан треугольник ABC . $AB=7$, $AC=10$, $BC=9$. Окружность проходит через точки A и C и пересекает прямые AB и BC в точках K и L , не принадлежащих вершинам, соответственно. Отрезок KL касается окружности, вписанной в ΔABC . Найти KL



Решение. © UMS Team, 2012, http://www.umsolver.com

Случай 1 . Точки K и L лежат на отрезках AB и BC соответственно.

Поскольку по условию точки A, K, L, C лежат на одной окружности, то сумма углов $\widehat{AKL}+\widehat{C}=180°$, откуда $\widehat{BKL}=\widehat{C}$. Это означает, что ΔKBL подобен треугольнику ΔABC . Пусть $|BK|=p$ и $|BL|=q$

Введем обозначения для длин отрезков x, y, t, s с концами в точках A, K, L, C и в соответствующих точках касания вписанной в треугольник ΔABC окружности. Используем теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных из одной точки окружности.

Из подобия $\dfrac{p}{9}=\dfrac{q}{7}=\dfrac{x+y}{10}$ Отсюда $p=0,9(x+y)$ и $q=0,7(x+y)$

По условию $t+s=10$, $p+x+t=7$, $q+y+s=9$

Сложим два последние равенства и получим $p+q+(x+y)+(t+s)=16$, откуда

$$0,9(x+y)+0,7(x+y)+(x+y)+10=16$$

$$x+y=\frac{6}{2,6}=\frac{60}{26}=\frac{30}{13}=2\frac{4}{13}\ .$$

Ответ случая 1 : $KL=2\frac{4}{13}$

Случай 2. Точка K лежит на луче BA , но не принадлежит отрезку AB .
Точка L лежит на отрезке BC .
В этом случае $\widehat{BKL}=\widehat{C}$, как вписанные углы (в окружность проходящую через точки A, K, L, C). $\triangle BKL$ должен быть подобен $\triangle ABC$ (по двум углам). Но у этих треугольников - одна и та же вписанная окружность. Радиусы вписанных окружностей подобных треугольников относятся как коэффициенты подобия. Вывод: $\triangle BKL=\triangle ABC$
Поэтому в этом случае $KL=AC=10$ (в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

Ответ случая 2 : $KL=10$

Случай 3. Точка L лежит на луче BC , но не принадлежит отрезку BC .
Точка K лежит на отрезке AB .
Этот случай симметричен **случаю 2** и поэтому ответ такой же: $KL=AC=10$.
Следует заметить, что для этого случая из равенства треугольников $\triangle BKL=\triangle ABC$ следует $BK=BA$ и $BL=BC$,то есть точки K и L совпадают с вершинами треугольника A и C . Это противоречит условию.

Вывод: случай 3 места не имеет

Случай 4.Точка K лежит на луче AB , но не принадлежит отрезку AB .
В этом случае отрезок KL лежит вне треугольника $\triangle ABC$ и не может касаться вписанной в этот трегольник окружности. Противоречие.

Вывод: случай 4 места не имеет.

Аналогично рассматривается **случай 5** , при котором точка L лежит на луче CB , но не принадлежит отрезку CB . Доказывается, что этот случай места не имеет.

Случай 6, при котором обе точки K и L не принадлежат соответственно отрезкам AB и BC , не имеет места, поскольку в этом случае прямая KL не пересекается с $\triangle ABC$ и поэтому не может касаться вписанной в треугольник окружности, которая целиком лежит внутри треугольника.

Вывод: имеют место только случаи 1, 2

Ответ задачи: случай 1 $KL=2\frac{4}{13}$ **; случай 2** $KL=10$

С5

Найти все значения a , при которых уравнение $\left|\frac{6}{x}-5\right|=ax-1$ на множестве $(0;\infty)$ имеет более двух корней.

Решение. © UMS Team, 2012, http://www.umsolver.com

Данное уравнение равносильно $a=\frac{\left|\frac{6}{x}-5\right|+1}{x}$ (поскольку $x=0$ не является решением этого уравнения ни при каком значении a)

Рассмотрим функцию $a(x)=\frac{\left|\frac{6}{x}-5\right|+1}{x}$ на промежутке $(0;\infty)$

При $0<x<\frac{6}{5}$ имеет место $a(x)=\frac{\frac{6}{x}-4}{x}=\frac{6-4x}{x^2}$

$a'(x)=\frac{4x-12}{x^3}<0$, функция $a=a(x)$ монотонно убывает.

$a\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{5}{6}$

При $x>\frac{6}{5}$ имеет место $a(x)=\frac{6-\frac{6}{x}}{x}=\frac{6x-6}{x^2}$

$a'(x)=\frac{-6x+12}{x^2}$

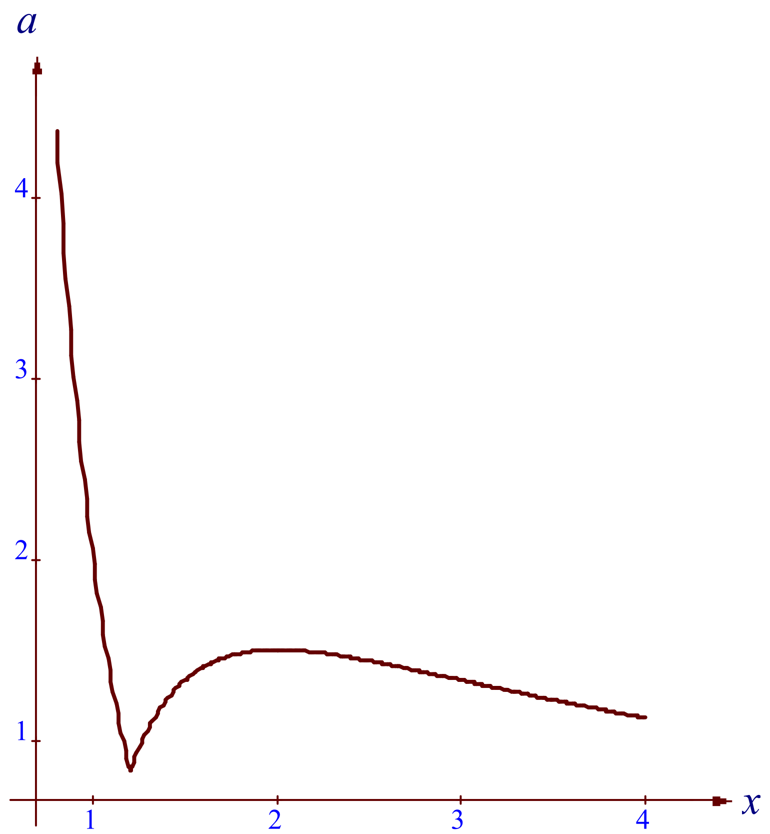
Если $\frac{6}{5}<x<2$, то $a'(x)=\frac{-6x+12}{x^2}>0$, функция $a=a(x)$ монотонно возрастает.

$a(2)=\frac{3}{2}=1,5$, $a'(2)=0$

Если $x>2$. то $a'(x)=\frac{-6x+12}{x^2}<0$, функция $a=a(x)$ монотонно убывает

При $x\to+\infty$ функция $a(x)=\frac{6x-6}{x^2}\to 0$

Эскиз графика функции $a(x)=\frac{\left|\frac{6}{x}-5\right|+1}{x}$ представим на рисунке



Из этого эскиза графика можно сделать вывод, что уравнение $a=\frac{\left|\frac{6}{x}-5\right|+1}{x}$ имеет

более двух решений (точнее, ровно три) при условии $a\left(\frac{6}{5}\right)<a<a(2)$, то есть

при условии $\frac{5}{6} < a < 1,5$

Эскиз графика и производные функции могут быть найдены с помощью программы UMS - www.umsolver.com.

Ответ : $\frac{5}{6} < a < 1,5$

C6

Группа учеников посетила театр и кино, причем каждый что-то посетил (кто-то мог посетить и кино и театр). Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от числа учеников посетивших театр. В кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от числа учеников посетивших кино.

а) Может ли мальчиков быть 9, если всего в группе 20 человек?

б) Какое наибольшее число мальчиков возможно при численности группы в 20 человек?

в) Какая наибольшая часть девочек от всей группы возможна, если не принимать во внимание условия пунктов а) и б) ?

Решение. © UMS Team, 2012, http://www.umsolver.com

Обозначим через :

x - число мальчиков, посетивших театр;

y - число мальчиков, посетивших кино;

t - число девочек, посетивших театр;

s - число девочек, посетивших кино;

p - число мальчиков в группе;

q - число человек в группе.

По условию числа $x,\ y,\ t,\ s,\ p,\ q$ - целые неотрицательные и

$$(*)\quad \begin{cases} x \le \dfrac{2}{11}(x+t) \\ y \le \dfrac{2}{5}(y+s) \\ p \le x+y \\ q-p \le t+s \\ x \le p \\ y \le p \\ t \le q-p \\ s \le q-p \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} 11x \le 2x+2t \\ 5y \le 2y+2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x \le 2t \\ 3y \le 2s \end{cases} \Rightarrow 9x+3y \le 2t+2s \le 4(q-p)$

$$\Rightarrow 6x+3p \le 6x+3(x+y) \le 2t+2s \le 4(q-p)$$

Откуда $6x \le 4q-7p$. Отсюда : $x \le \dfrac{4q-7p}{6} \quad (**)$

С другой стороны из системы $(*)$ следует $3(p-x) \le 3y \le 2s \le 2(q-p)$,

откуда $5p \le 2q+3x \le 2q+3\cdot\dfrac{4q-7p}{6}$.

Получаем неравенство $17p \le 8q$,

откуда $p \le \dfrac{8q}{17} (***)$

С другой стороны, получаем еще одно неравенство

$$\frac{5p-2q}{3} \le x \le \frac{4q-7p}{6} \quad (****)$$

а) Если $q=20$, и $p=9$, $\dfrac{5p-2q}{3}=1\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{4q-7p}{6}=2\dfrac{5}{6}$

Выбираем $x=2$, удовлетворяющее неравенству $(****)$.

Пусть $y=7$, $t=9$, $s=11$

При данных значениях условие задачи выполнено. Это означает, что 9 мальчиков возможно.

б) Если $q=20$, то из неравенства $(***)$ $p\le \frac{8\cdot 20}{17}=9\frac{7}{17}$

Это означает, что наибольшее число мальчиков $p=9$.

в) Часть девочек от общего количества оцениваем по формуле

$$\frac{q-p}{q}\ge \frac{q-\frac{8q}{17}}{q}=\frac{9}{17}$$

Это число может быть достигнуто при условии , например, $q=17$, $p=8$, $x=2$, $y=6$, $t=9$, $s=9$

. **Ответ: а) да ; б)** 9 **с) наименьшая доля девочек, которая может быть в группе -** $\frac{9}{17}$.